

Το πρόβλημα του Plateau

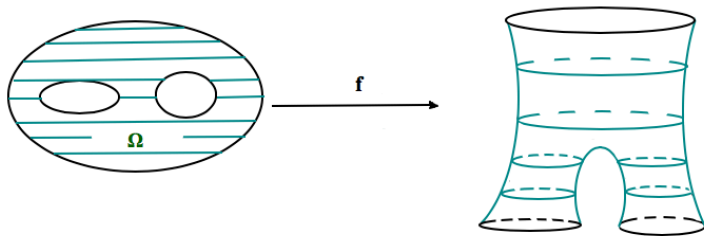
Ανδρέας Σάββας-Χαλιλάι

Τμήμα Μαθηματικών
users.uoi.gr/ansavas

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Εμβαδόν επιφανειών

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ μια συνεκτική και ανοικτή περιοχή με συμπαγές C^1 -λείο σύνορο $\partial\Omega$ και $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια επιφάνεια.



Το εμβαδόν της επιφάνειας (με σύνορο) $\Sigma = f(\bar{\Omega})$ δίνεται από τον τύπο:

$$\text{Area}(\Sigma) = \int_{\bar{\Omega}} \sqrt{|f_x|^2 \cdot |f_y|^2 - \langle f_x, f_y \rangle^2} \, dx dy$$

Το πρόβλημα του Lagrange

Πρόβλημα (Lagrange 1760)

Έστω $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ μια κατά τμήματα C^1 -λεία καμπύλη και ας συμβολίσουμε με $\mathcal{M}(\Gamma)$ το σύνολο όλων των επιφανειών με σύνορο την καμπύλη Γ . Θεωρούμε το συναρτησιακό $\mathcal{F} : \mathcal{M}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$\mathcal{F}(\Sigma) = \text{Area}(\Sigma)$$

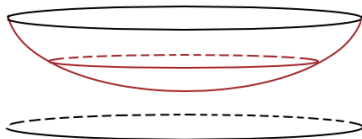
- 1 Υπάρχει ελαχιστοποιήτης $\Sigma_0 \in \mathcal{M}(\Gamma)$ του συναρτησιακού $\mathcal{F}$?
- 2 Εάν υπάρχει ελαχιστοποιητής $\Sigma_0 \subset \mathbb{R}^3$, είναι μοναδικός?
- 3 Πόσο ομαλός είναι ένας ελαχιστοποιήτης $\Sigma_0 \subset \mathbb{R}^3$?

Ορισμός

Τα “κρίσιμα σημεία” του συναρτησιακού εμβαδού θα ονομάζονται **ελαχιστικές επιφάνειες**.

Lagrange

Ο Lagrange επιχείρησε να κατασκευάσει ελαχιστικές επιφάνειες που προέρχονται ως γραφήματα λείων συναρτήσεων $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, δηλ. επιφάνειες της μορφής $f(x, y) = (x, y, u(x, y))$.



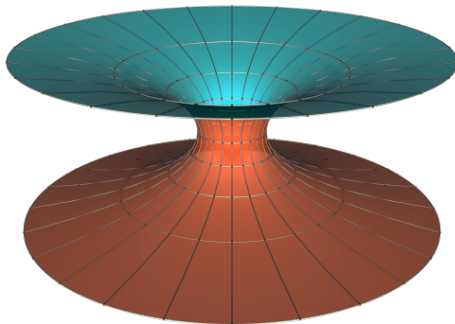
Ο Lagrange διαπίστωσε ότι η f παράγει ελαχιστική επιφάνεια εάν η u πληρεί την διαφορική εξίσωση

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2(u_x u_y)u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0.$$

Δεν μπόρεσε να βρεί καμμία μη τετριμμένη λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης.

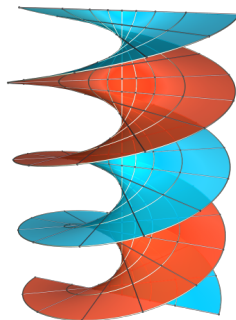
Αλυσοειδής επιφάνεια

Η **αλυσοειδής επιφάνεια** (Euler 1744) προκύπτει περιστρέφοντας το γράφημα του υπερβολικού συνημιτόνου γύρω από τον άξονα Oz .



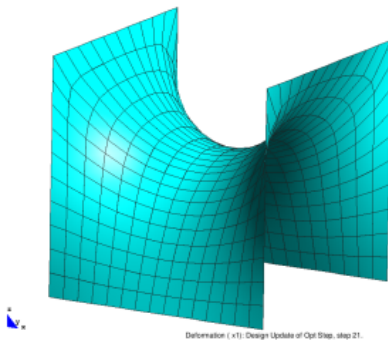
Ελικοειδής επιφάνεια

Η **ελικοειδής επιφάνεια** κατασκευάζεται ως εξής: Θεωρούμε ένα τμήμα ℓ το οποίο τέμνει κάθετα τον z -άξονα. Μετατοπίζουμε τώρα το τμήμα ℓ στη διεύθυνση του θετικού z -άξονα και ταυτόχρονα την περιστρέφουμε, πάντοτε κάθετος προς τον Oz -άξονα, με σταθερή ταχύτητα.



Scherk

Η **επιφάνεια του Scherk** αποτελεί το τέταρτο γνώστο παράδειγμα ελαχιστικής επιφάνειας. Ανακαλύφθηκε το 1834 από τον H. Scherk.

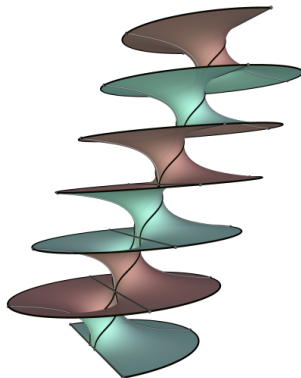


Η επιφάνεια περιγράφεται τοπικά από την απεικόνιση:

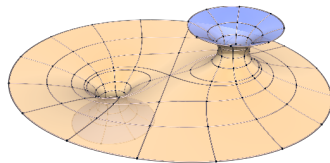
$$f(x, y) = (x, y, \cos x / \cos y)$$

Riemann

Το 1867, σε ένα μη δημοσιευμένο άρθρο του Riemann, βρέθηκε μια πολύ ενδιαφέρουσα ελαχιστική επιφάνεια, η οποία φυλλώνεται από κύκλους.

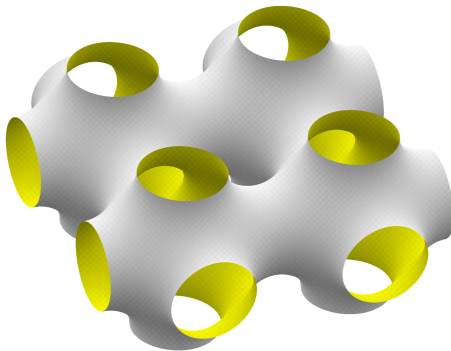


Riemann



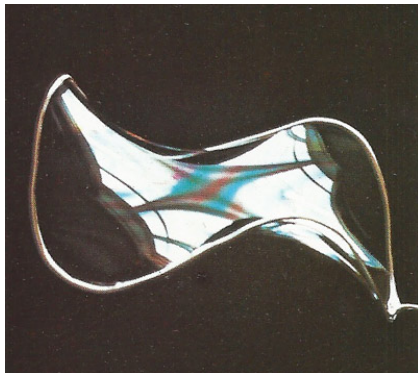
Schwarz

Η παρακάτω ελαχιστική επιφάνεια ανακαλύφθηκε από τον **Hermann Schwarz** το 1880.

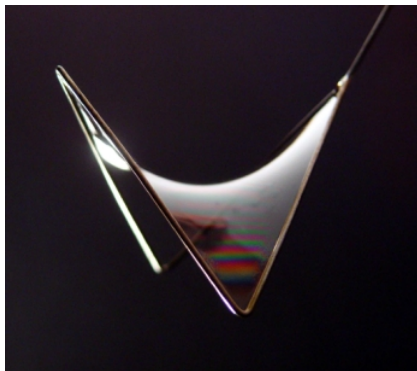


Τα πειράματα του Plateau

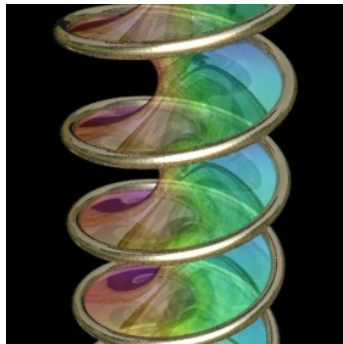
Ο **Joseph Antoine Ferdinand Plateau** (1801-1883) ήταν Βέλγος Φυσικός. Μέσω πειραμάτων, ο Plateau (1849) παρατήρησε ότι μια ελαχιστική επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ μπορεί να παραχθεί βυθίζοντας ένα σύρμα σε διάλυμα σαπουνιού.



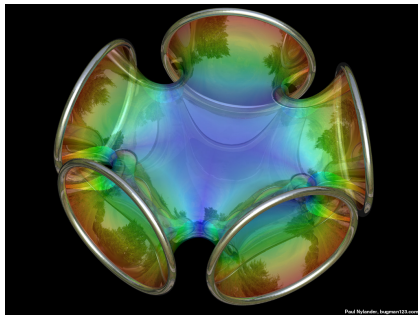
Παραδείγματα



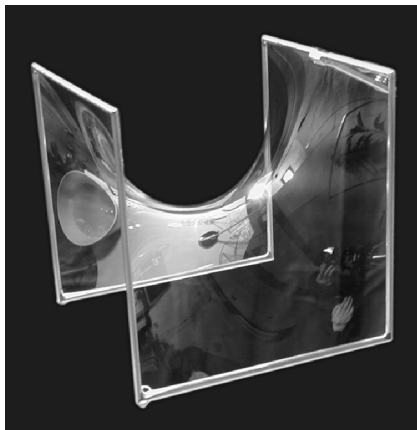
Παραδείγματα



Παραδείγματα



Παραδείγματα



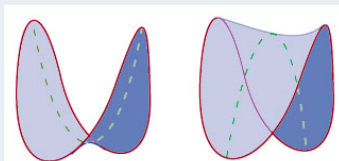
Υπαρξη και μοναδικότητα

Θεώρημα (Rado 1930 & Douglas 1931)

Κάθε **κατά τμήματα C^1 -λεία** καμπύλη Jordan $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, αποτελεί και σύνορο μιας **αναλυτικής**, ομοιομορφικής με τον δίσκο, ελαχιστικής επιφάνειας $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

Παρατηρήσεις

- (1) Η λύση του προβλήματος του Plateau, γενικά δεν είναι μοναδική.

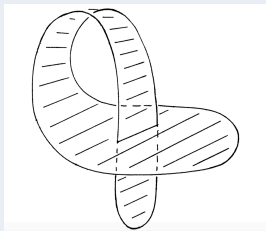


A curve and two possible saddle-shaped film surfaces

Υπαρξη και μοναδικότητα

Παρατηρήσεις

- (2) Η λύση του προβλήματος Plateau θα μπορούσε να έχει αυτοτομές, ακόμα και όταν το σύνορο Γ δεν έχει αυτοτομές.



Οι Ekholm, White & Wienholtz (2002) έδειξαν ότι η λύση του προβλήματος Plateau δεν έχει αυτοτομές όταν το σύνορο έχει ολική καμπυλότητα μικρότερο του 4π .

- (3) Ο Morrey (1948) γενίκευσε το Θεώρημα των Rado & Douglas για επιφάνειες σε 3-διάστατα πολυπύγματα.

Αναπαράσταση Weierstraß

Θεώρημα (Weierstraß-Enneper ~ 1865 , Ahlfors-Osserman ~ 1955)

Έστω f, g μιγαδικές συναρτήσεις ορισμένες σε απλά συνεκτική περιοχή του $\mathbb{C}$, τέτοιες ώστε η g να είναι μερόμορφη, η f να είναι ολόμορφη και το γινόμενο $f \cdot g^2$ να είναι ολόμορφη. Τότε, η επιφάνεια $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ με συντεταγμένες:

$$x_1(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left(1 - g^2(\zeta)\right) f(\zeta) d\zeta$$

$$x_2(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z i \left(1 + g^2(\zeta)\right) f(\zeta) d\zeta$$

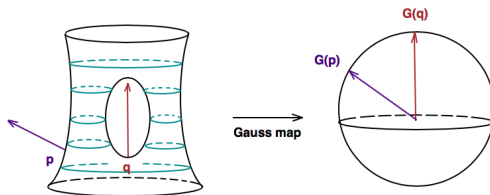
$$x_3(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z 2f(\zeta)g(\zeta)d\zeta$$

είναι ελαχιστική. Ισχύει και το αντίστροφο: κάθε ελαχιστική επιφάνεια περιγράφεται τοπικά σε αυτή την μορφή.

Αναπαράσταση Weierstraß

Θεώρημα

Η απεικόνιση Gauß $\mathcal{G} : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ μιας ελαχιστικής επιφάνειας είναι ολόμορφη απεικόνιση.



$$\mathcal{G} = \left(\frac{2\operatorname{Re}(g)}{1 + |g|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(g)}{1 + |g|^2}, \frac{|g|^2 - 1}{1 + |g|^2} \right) \quad \& \quad \mathcal{G} \circ \pi = g.$$

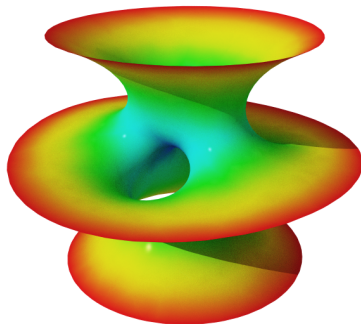
Πλήρεις ελαχιστικές επιφάνειες

Πλήρεις ελαχιστικές επιφάνειες: είναι λείες επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$ χωρίς σύνορο με τις εξής ιδιότητες:

- 1 έχουν άπειρο εύρος,
- 2 τοπικά ελαχιστοποιούν το εμβαδό.

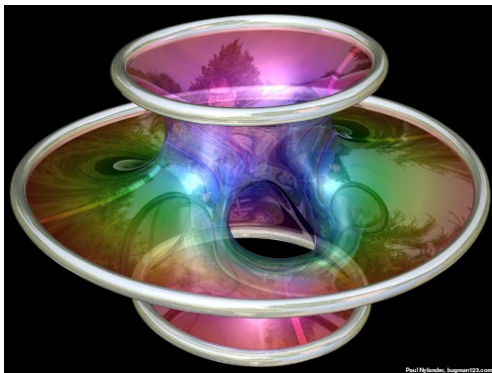
Η επιφάνεια του Costa

Η εικονιζόμενη ελαχιστική επιφάνεια, ανακαλύφθηκε το 1982 από τον Βραζιλιάνο μαθηματικό Celso José da Costa. Πρόκειται για ελαχιστική επιφάνεια η οποία είναι τοπολογικά ισοδύναμη με έναν τόρο από τον οποίο έχουν αφαιρεθεί 3 σημεία.



Η επιφάνεια του Costa

Πριν την ανακάλυψη του C. Costa, υπήρχε η εικασία ότι το επίπεδο, η ελικοειδής και η αλυσοειδής επιφάνεια είναι οι μόνες πλήρεις, χωρίς αυτοτομές, και με πεπερασμένο γένος ελαχιστικές επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$.



Οι εικασίες του Nirenberg

Εικασία (Nirenberg 1955)

Είναι αλήθεια ότι η εικόνα της απεικόνισης Gauß μιας πλήρους και μη επίπεδης ελαχιστικής επιφάνειας στον $\mathbb{R}^3$ είναι πυκνό υποσύνολο της σφαίρας $\mathbb{S}^2$; Είναι αλήθεια ότι το επίπεδο και το ελικοειδές είναι οι μόνες πλήρεις και απλά συνεκτικές ελαχιστικές επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$;

Θεώρημα (Osserman 1959 & Fujimoto 1997)

Η εικόνα της απεικόνισης Gauß μιας πλήρους μη επίπεδης ελαχιστικής επιφάνειας $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ είναι ολόκληρη η $\mathbb{S}^2$ πλην το πολύ 4 σημείων.

Θεώρημα (Meeks & Tinaglia 2016)

Το επίπεδο και το ελικοειδές είναι οι μόνες πλήρεις και απλά συνεκτικές ελαχιστικές επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$.

Οι εικασίες του Calabi

Εικασία (Calabi 1965)

Μια πλήρης και μη επίπεδη ελαχιστική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ δεν μπορεί να περιέχεται σε ημίχωρο.

Εικασία (Calabi 1965)

Δεν υπάρχουν πλήρεις και φραγμένες ελαχιστικές επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$.

Αμφότερες οι εικασίες αποδείχθηκαν ως **μη αληθείς**.

- 1 Το 1^ο παράδειγμα πλήρους ελαχιστικής επιφάνειας που περιέχεται σε ημίχωρο κατασκευάστηκε από τους Jorge & Xavier το 1980.
- 2 Το 1997 ο Nadirashvili κατασκευάσε το 1^ο παράδειγμα πλήρους ελαχιστικής επιφάνειας η οποία βρίσκεται εντός μιας μπάλας του $\mathbb{R}^3$.

Η εικασία του Bernstein

Εικασία (Bernstein 1918)

Είναι αλήθεια ότι κάθε ολική γραφική ελαχιστική υπερεπιφάνεια στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{n+1}$ είναι υπερεπίπεδο; Ισοδύναμα, αληθεύει ότι οι μόνες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$\operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} u}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} u|^2}} \right) = 0$$

είναι της μορφής $u(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b$?

- ❶ **ΝΑΙ** εάν $n = 2$: Bernstein 1918.
- ❷ **ΝΑΙ** εάν $n = 3$: De Giorgi 1965.
- ❸ **ΝΑΙ** εάν $n = 4$: Almgren 1966.
- ❹ **ΝΑΙ** εάν $n \leq 7$: Simons 1968.
- ❺ **ΟΧΙ** εάν $n \geq 8$: Bombieri, De Giorgi and Giusti 1969.

Τοπολογία των ελαχιστικών επιφανειών

Πρόβλημα

Ποιές επιφάνειες δύνανται να πραγματοποιηθούν ως πλήρεις ελαχιστικές επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$? Υπάρχουν τοπολογικοί περιορισμοί για κάτι τέτοιο;

Εικασία (Hoffman & Meeks)

Έστω $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ μια πλήρης, προσανατολισμένη, ελαχιστική επιφάνεια με πεπερασμένη τοπολογία, δηλ. γένους g και k "ends". Τότε:

$$k \leq g + 2$$