ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εβδομαδιαίο Σεμινάριο

Common hypercyclic vectors for families of backward shift operators

Τσιρίβας Νικόλαος

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Ακολουθεί η περίληψη στις επόμενες σελίδες.

Τετάρτη 12 Οκτωβρίου 2016, 6:00μμ

Αίθουσα 201α Τμήματος Μαθηματικών

Μετά την ομιλία ακολουθεί καφές και συζήτηση στο εντευκτήριο του Τμήματος

Τσιρίβας Νικόλαος

Τίτλος ομιλίας:

Common hypercyclic vectors for families of backward shift operators

Abstract

Σε αυτή την ομιλία παρουσιάζεται ένα αποτέλεσμα από εργασία η οποία έχει γίνει δεκτή για δημοσίευση από το Journal of Operator Theory. Η εργασία αυτή εκπονήθηκε στα πλαίσια του ερευνητικού προγράμματος

«Ενίσχυση Μεταδιδακτόρων Ερευνητών» της Γενικής Γραμματείας Έρευνας και Τεχνολογίας.

Θεωρούμε τον χώρο l^2 *των τετραγωνικά αθροίσιμων ακολουθιών με τιμές στο σύνολο* $\mathbb{C}$ *των μιγαδικών αριθμών, εφοδιασμένο με την φυσική νόρμα του χώρου* l^2.*Για έναν τελεστή T:* $l^2 \to l^2$ *θα συμβολίζουμε με* T^n *τις iterates (δυνάμεις) του που ορίζονται επαγωγικά ως εξής* $T^1 := T$ *και* $T^{n+1} := T^n$ *ο T*, για n=1,2,… όπου με T^n *ο T*, εννοούμε την συνήθη σύνθεση των απεικονίσεων T^n *και T* .

Έστω B: $l^2 \to l^2$ *να είναι ο συνήθης Backward shift συνεχής (ως προς την* l^2 *νόρμα) , γραμμικός τελεστής που ορίζεται με τον τύπο :*

$B(\,(x_1, x_2\ \dots)\,) = (x_2, x_3\ , \dots)$ *για κάθε* $(\,x_1, x_2\ \dots.\,) \in l^2$.

Για $\lambda \in \mathbb{C}$ *ορίζουμε το γινόμενο λB (σαν το σύνηθες γινόμενο του αριθμού λ επί τον τελεστή B).*

Ας σταθεροποιήσουμε ένα $\lambda \in \mathbb{C}$ *, με |λ|>1 .Είναι καλά γνωστό ότι υπάρχει* $x \in l^2$ *έτσι ώστε η ακολουθία* $(\lambda B)^n(x)$, *n=1,2,… να είναι πυκνή (ως προς την* l^2 *νόρμα πάντα) στον* l^2 *.*

Γενικότερα είναι γνωστό ότι αν σταθεροποιήσουμε ένα $\lambda \in \mathbb{C}$ *, με |λ|>1 και μια γνήσια αύξουσα ακολουθία των φυσικών αριθμών* (k_n), n=1,2,… τότε *υπάρχει* $x \in l^2$ *έτσι ώστε ακολουθία* $(\lambda B)^{k_n}(x)\,, n = 1,2, \dots$ *να είναι πυκνή στον* l^2 *.*

Ονομάζουμε την ακολουθία $(\lambda B)^{k_n}(x)$, $n = 1,2,\ldots$ τροχιά του x κάτω από την δράση της ακολουθίας των τελεστών $(\lambda B)^{k_n}$, n=1,2,… .Σε αυτή την εργασία εξετάζουμε το εξής

ΠΡΟΒΛΗΜΑ :

Σταθεροποιούμε μια γνήσια αύξουσα ακολουθία των φυσικών αριθμών

$(\boldsymbol{k_n})$, n=1,2,….

Το ερώτημα που μελετάμε είναι το εξής:

Υπάρχει $\boldsymbol{x \in l^2}$ έτσι ώστε η ακολουθία $(\boldsymbol{\lambda B})^{k_n}(\boldsymbol{x})$,n=1,2,… να είναι πυκνή στον $\boldsymbol{l^2}$ για κάθε θετικό αριθμό λ>1 ;

Αυτό το ερώτημα μπορεί να διατυπωθεί κάπως άτυπα με άλλα λόγια ως εξής:

Υπάρχει ακολουθία στον l^2 της οποίας η τροχιά να είναι πυκνή για κάθε λ>1 ; (υπονοώντας πάντα κάτω από την δράση των τελεστών $(\lambda B)^{k_n}$, n=1,2,…).

Η απάντηση στο παραπάνω πρόβλημα είναι καταφατική ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ η ακολουθία

$(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{k_n}})$, n=1,2,… ΔΕΝ ανήκει στον $\boldsymbol{l^1}$,

που εκφράζεται με την συνθήκη

$$\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{k_n}}\right) = +\infty$$

(Για παράδειγμα η $(\mathrm{k_n})$, n=1,2,….μπορεί να είναι μια αριθμητική πρόοδος, όχι όμως γεωμετρική ούτε μια ακολουθία που τείνει στο άπειρο με πολυωνυμικό growth όπως η $\boldsymbol{n^2}$, $\boldsymbol{n = 1, 2}, \ldots$).

Δείχνουμε πώς συνδέεται αυτό το πρόβλημα με το θεώρημα κατηγορίας Baire μιας και η λύση του ανάγεται στο εάν η υπεραριθμήσιμη τομή μιας οικογένειας Gδ και πυκνών υποσυνόλων του χώρου l^2 είναι μη κενή όπου βέβαια το θεώρημα Baire δεν μπορεί να μας δώσει απάντηση.

Σε αυτή την ομιλία θα αποδείξουμε μόνο την αρνητική περίπτωση αυτού του αποτελέσματος επειδή η απόδειξή της μπορεί να παρουσιαστεί στα πλαίσια μιας ωριαίας διάλεξης .

Δείχνουμε ακόμα πώς συνδέεται αυτό το πρόβλημα με την έννοια της υπερκυκλικότητας και των κοινών υπερκυκλικών διανυσμάτων.