Κάνοντας Γεωμετρία και Τοπολογία με το φάσμα της Λαπλασιανής

Ιάκωβος Ανδρουλιδάκης

Ιωάννινα, Ιούνιος 2019

Εισαγωγή

Στο κέντρο της σύγχρονης Γεωμετρίας βρίσκεται η κατανόηση των Γεωμετρικών και Τοπολογικών αναλλοίωτων για παθολογικούς χώρους. Παραδείγματα τέτοιων χώρων που παρουσιάζονται με φυσικό τρόπο σε Γεωμετρικά προβλήματα, καθώς και σε προβλήματα Ανάλυσης, είναι (ψευδο)πολλαπλότητες με διαστρωμάτωση, όπως πολλαπλότητες με σύνορο, γωνίες, ακμές, κλπ. Πολύ μεγαλύτερη παθολογία παρουσιάζεται σε χώρους-πηλίκα, όπως ο χώρος των τροχιών ενός δυναμικού συστήματος. Και αυτοί οι χώροι παρουσιάζονται σε αφθονία. Εν γένει, σήμερα η Γεωμετρία καλείται να κατανοήσει πολλά περισσότερα παραδείγματα παθολογικών χώρων, απ'ότι λείων πολλαπλοτήτων.

Το ότι οι κλασσικές Γεωμετρικές/Τοπολογικές μέθοδοι δεν μπορούν να εφαρμοστούν σε τέτοιες παθολογικές περιπτώσεις, εντοπίζεται στη δουλειά του ίδιου του Riemann[1]. Μια πρόταση προς την κατεύθυνση της αντιμετώπισής τους, έρχεται από το θεώρημα Gelfand-Naimark: Η ιδέα είναι να αντικαταστήσουμε τέτοιους παθολογικούς χώρους από κατάλληλες άλγεβρες τελεστών (μη-μεταθετικές), οι οποίες κατασκευάζονται χρησιμοποιώντας τις συμμετρίες του εκάστοτε χώρου. Οι ζητούμενες γεωμετρικές/τοπολογικές αναλλοίωτες αναμένεται να εντοπιστούν στη φασματική θεωρία αυτών των τελεστών. Ειδικότερα, η κατανόηση του φάσματος τελεστών τύπου Laplace παίζει τον κύριο ρόλο στην εξαγωγή των απαιτούμενων Γεωμετρικών/Τοπολογικών πληροφοριών.

Σκοπός του σημειώματος αυτού είναι η συνοπτική παρουσίαση ορισμένων αποτελεσμάτων εξαγωγής Γεωμετρικών και Τοπολογικών αναλλοίωτων από το φάσμα του τελεστή Laplace-Beltrami.

Συγκεκριμένα, όσον αφορά στη Γεωμετρία, περιγράφουμε το θεώρημα του H. Weyl που συνδέει τον όγκο με αυτό το φάσμα. Σχετικά με την Τοπολογία, αρχικά δίνουμε την σύγχρονη απόδειξη του θεωρήματος Gauss-Bonnet ως μερική περίπτωση του θεωρήματος Atiyah-Singer σχετικά με τον αναλυτικό δείκτη ενός ελλειπτικού διαφορικού τελεστή. Κατόπιν συζητάμε πως το θεώρημα Atiyah-Bott συνδέει τον αναλυτικό δείκτη με το φάσμα του τελεστή Laplace-Beltrami. Η βιβλιογραφία που παρατίθεται θα μπορούσε να αποτελέσει αρχή για βαθύτερη και ευρύτερη μελέτη αυτών των ιδεών, ειδικά το άρθρο επισκόπησης [3] και το βιβλίο [4].

[1] B. Riemann, On the hypotheses that lie in the foundations of Geometry: "...it seems that the empirical notions on which the metric determinations of space are based...lose their validity in the infinitely small; it is therefore quite definitely conceivable that the metric relations of space in the infinitely small do not conform to the hypotheses of geometry; and in fact one ought to assume this as soon as it permits a simpler way of explaining phenomena."

Να σημειώσουμε επιπλέον ότι η ανάγκη για κατανόηση των παθολογικών χώρων έχει αναμορφώσει δραματικά τη σύγχρονη Γεωμετρία. Οι ιδέες που περιγράφουμε στο σημείωμα αυτό, αποτελούν την απαρχή της Μη-Μεταθετικής Γεωμετρίας [2], η οποία κάνει ισχυρή χρήση "hard" ανάλυσης Fourier, όπως ψευδοδιαφορικό λογισμό και απειροδιάστατες αναπαραστάσεις. Επιπλέον κάνει χρήση K-θεωρίας, μια και είναι η κατάλληλη αλγεβρική γλώσσα για την ταξινόμηση αλγεβρών τελεστών.

Σχηματικά, θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί πως γίνεται αντιληπτή η θεμελιώδης έννοια του σημείου στη Μη-Μεταθετική Γεωμετρία. Η απάντηση είναι ότι, η μόνη υλοποίηση της έννοιας του σημείου που επιβιώνει ανεξάρτητα από την παθολογία που παρουσιάζεται, είναι εκείνη της τετριμμένης αναπαράστασης.

1 Ένα θεώρημα του H. Weyl

Ξεκινούμε περιγράφοντας το πρώτο αποτέλεσμα που συνδέει το φάσμα της Λαπλασιανής με το βασικό Γεωμετρικό μέγεθος του εμβαδού. Το αποτέλεσμα αυτό δόθηκε από τον Hermann Weyl το 1911 [5] [6].

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ένα επίπεδο χωρίο. Έστω ο διαφορικός τελεστής de Rham $d : \Omega^*(A) \to \Omega^{*+1}(A)$, όπου $\Omega^*(A)$ οι διαφορικές μορφές στο A. Χρησιμοποιώντας την συνηθισμένη Ευκλείδεια μετρική, ορίζεται ο δυϊκός τελεστής $d^* : \Omega^*(A) \to \Omega^{*-1}(A)$. Θεωρούμε τον γραμμικός τελεστής

$$\Delta = dd^* + d^*d : \Omega^*(A) \to \Omega^*(A)$$

Είναι αυτοσυζυγής διαφορικός τελεστής τάξης 2 και λέγεται τελεστής Laplace-Beltrami.

Ένας αριθμός λ είναι ιδιοτιμή του τελεστή αυτού όταν ικανοποιεί το πρόβλημα Dirichlet

$$\Delta u = \lambda u, \quad u|_{\partial A} = 0$$

Χρησιμοποιώντας το φασματικό θεώρημα αποδεικνύεται ότι οι ιδιοτιμές της Δ είναι της μορφής

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots, \quad \lambda_n \leqslant \infty, n \in \mathbb{N}$$

(Εδώ, η ακολουθία λ_n δεν έχει πεπερασμένο όριο.) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, έστω $N(\lambda)$ ο αριθμός των ιδιοτιμών της Δ που βρίσκονται στο διάστημα $[0, \lambda]$.

Ο Hermann Weyl [5] [6] απέδειξε το επόμενο αποτέλεσμα, που λέει ότι το εμβαδόν στην Ευκλείδεια Γεωμετρία καθορίζεται από τις ιδιοτιμές του τελεστή Laplace-Beltrami:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{\text{Area}(A)}{2\pi}$$

1.1 Ασυμπτωτική επέκταση

Έστω (M, g) μια (C^∞) συμπαγής πολλαπλότητα Riemann διάστασης n. Όπως πριν, θεωρούμε τον τελεστή Laplace-Beltrami $\Delta = dd^* + d^*d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$.

Αφού ο Δ είναι αυτοσυζυγής, δέχεται συναρτησιακό λογισμό. Κατά συνέπεια, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ορίζεται ο ολοκληρωτικός τελεστής $e^{-t\Delta}$. Ο τελεστής αυτός είναι trace class. Αν $p(t, x, y)$ είναι ο πυρήνας Schwarz του $e^{-t\Delta}$, τότε το $p(t, x, x)$ έχει ασυμπτωτική επέκταση ($t \to 0$) της μορφής:

$$(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \sum u_j j(x) t^j$$

όπου οι συντελεστές $u_j(x)$ εξαρτώνται από την καμπυλότητα της M. Ολοκληρώνοντας την έκφραση αυτή επί της M παίρνουμε την προσέγγιση

$$tr(e^{-t\Delta}) \sim (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \sum (c_j t^j)$$

Από τη σκοπιά αυτή, το αποτέλεσμα του Weyl λέει ότι ο συντελεστής c_0 είναι ο όγκος της M.

2 Τοπολογικές αναλλοίωτες και το φάσμα του τελεστή Laplace-Beltrami

2.1 Επισκόπηση του θεωρήματος Gauss-Bonnet

Υπενθυμίζουμε το κλασσικό θεώρημα Gauss-Bonnet: Έστω $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ μια επιφάνεια (χωρίς σύνορο) με καμπυλότητα Gauss K και χαρακτηριστική Euler $\chi(\Sigma)$. Τότε ισχύει

$$\int_\Sigma K = \chi(\Sigma)$$

Η γενίκευση του θεωρήματος αυτού σε μια προσανατολίσμη πολλαπλότητα Riemann (M, g) διάστασης $2k$, έχει ως εξής: Θεωρούμε τη συνοχή Levi-Civita ∇^g και την αντίστοιχη καμπυλότητα $\Omega^g : TM \times TM \to End(TM)$. Λόγω προσανατολισιμότητας, μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο πλαίσιο (βάση) της εφαπτόμενης δέσμης, ώστε κάθε πίνακας $\Omega^g(X, Y)$ να είναι αντισυμμετρικός και να έχει σταθερό πρόσημο (δηλαδή να ζει στην ομάδα $SO(k)$).

Γενικά, αν ένας $k \times k$ πίνακας A (πραγματικός) ικανοποιεί $A = -A^T$, ορίζεται το πολυώνυμο Pfaff $Pf(A)$ από τη σχέση

$$(Pf(A))^2 = det(A)$$

Για παράδειγμα, αν $k = 1$ και $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{21} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ όπου $x_{12} = -x_{21}$ το πολυώνυμο Pfaff υπολογίζεται ως εξής: $Pf(A) + \frac{1}{2!1!}(x_{12} - x_{21}) = x_{12}$.

Ορίζεται η διαφορική 2-μορφή $eu(M, g) = \frac{1}{(2\pi)^k} Pf(\Omega^g)$ και η χαρακτηριστική κλάση Euler $e(M) = [eu(M, g)] \in H^{2k}_{dR}(M)$. Σε αυτό το πλαίσιο, το θεώρημα Gauss-Bonnet γίνεται:

$$\int_M e(M) = \chi(M)$$

2.2 Το θεώρημα Gauss-Bonnet ως μερική περίπτωση του θεωρήματος Atiyah-Singer

Ας θεωρήσουμε τώρα τον διαφορικό τελεστή Dirac $D = d^* + d : H^{ev}_{dR}(M) \to H^{odd}_{dR}(M)$. Είναι ένας ελλειπτικός τελεστής, οπότε από το θεώρημα Atkinson προκύπτει ότι είναι Fredholm, δηλαδή $dim(kerD) < \infty$ και $dim(cokerD) < \infty$. Ορίζεται λοιπόν ο "αναλυτικός δείκτης" του D:

$$Ind_{an}(D) = dim(kerD) - dim(cokerD) \in \mathbb{Z}$$

Το θεώρημα Atiyah-Singer [1] δίνει τον επόμενο τύπο για τον υπολογισμό του αναλυτικού δείκτη:

$$Ind_{an}(D) = \int_{T^*M} ch(\sigma(D)) \wedge Td(M)$$

Εδώ $Td(M)$ είναι η χαρακτηριστική κλάση Todd της M, $\sigma(D)$ είναι το πρωτεύον σύμβολο του D (για την ακρίβεια η κλάση του στην K-θεωρία) και $ch(\sigma(D))$ η αντίστοιχη κλάση Chern (μέσω του χαρακτήρα Chern).

Προκύπτει ότι το δεξί μέλος της ισότητας αυτής ισούται με $\int_M e(M)$. Όσο για το αριστερό μέλος, από θεωρία Hodge προκύπτει ότι ο αναλυτικός δείκτης ισούται με $\sum_{i=1}^{k}(-1)^i dim(H^i_{dR}(M))$, ο οποίο είναι ακριβώς η χαρακτηριστική Euler $\chi(M)$.

2.3 Σύνδεση με το φάσμα του τελεστή Laplace-Beltrami: Το θεώρημα Atiyah-Bott

Η σχέση μεταξύ των τελεστών Laplace-Beltrami και Dirac είναι:

$$\Delta = D^*D$$

Λαμβάνοντας υπ'όψιν αυτό και το αποτέλεσμα των Atiyah και Bott που περιγράφουμε παρακάτω, παίρνουμε την σύνδεση του τοπολογικού θεωρήματος Gauss-Bonnet με το φάσμα του τελεστή Laplace-Beltrami.

Για να περιγράψουμε το αποτέλεσμα των Atiyah και Bott, ξεκινούμε από έναν τυχαίο ελλειπτικό διαφορικό τελεστή A. Γνωρίζουμε ότι οι μη μηδενικές ιδιοτιμές των αυτοσυζυγών τελεστών A^*A και AA^* είναι ίσες, αφού:

$$A^*Au = \lambda u \Leftrightarrow AA^*(Au) = \lambda(Au)$$

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση ώστε οι τελεστές $f(A^*A), f(AA^*)$ είναι trace class και $f(0) = 1$. Τότε:

$$dim(kerA) - dim(cokerA) = dim(ker(A^*A)) - dim(ker(AA^*)) = tr(f(A^*A) - f(AA^*))$$

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω στον τελεστή D και την συνάρτηση $f(\lambda) = e^{-t\lambda}$ παίρνουμε:

$$Ind_{an}(D) = tr(e^{-tD^*D} - e^{-tDD^*})$$

για κάθε $t > 0$. (Κατόπιν παίρνουμε το όριο για $t \to \infty$.)

References

[1] Atiyah, M. F.; Singer, I. M. (1968) The index of elliptic operators. I. *Ann. of Math.* (2) 87 484–530.

[2] Connes, Alain Noncommutative geometry. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994. xiv+661 pp. ISBN: 0-12-185860-X

[3] Singer, I. M. Eigenvalues of the Laplacian and invariants of manifolds. Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974), Vol. 1, pp. 187–200. Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975.

[4] Lawson, H. Blaine, Jr.; Michelsohn, Marie-Louise Spin geometry. Princeton Mathematical Series, 38. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989. xii+427 pp. ISBN: 0-691-08542-0

[5] Weyl, Hermann (1911). Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte. *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*: 110–117.

[6] Weyl, Hermann (1912). Das asymptotische Verteilungsgesetz linearen partiellen Differentialgleichungen. *Math. Ann.* 71: 441–479.

Laplacians for generalized smooth distributions

Iakovos Androulidakis
(with Yuri Kordyukov)

National and Kapodistrian University of Athens

Ioannina, June 2019

Motivation 1

- Index theory: M closed, odd-dimensional manifold, D elliptic differential operator on M. Then $\mathrm{Ind}(D) = 0$.
- Many manifolds come with extra structure which determines a distribution. *e.g.* contact manifolds (odd-dimensional).
- Hope: Hypoelliptic + self-adjoint Laplacian along the distribution: Study its spectrum; Obtain new operators (heat, wave, etc).
- *Lots of* interesting distributions of non-constant rank around: Sub-Riemannian geometry...

Motivation 1: Example (constant rank)

- Action $S^1 \times S^{2n+1} \to S^{2n+1} \rightsquigarrow$ Reeb vector field ξ
- Projection $\pi : S^{2n+1} \to S^{2n+1}/S^1 = \mathbb{C}P^n$
- Distribution (constant rank) $H = \pi^*(T\mathbb{C}P^n)$ on S^{2n+1}. Put

$$\Delta_H = \sum_{i=1}^{k} W_i^2$$

  where $\{W_1, \ldots, W_k\}$ orthonormal frame of H.
- $H = \ker\theta$ where $\theta \in \Omega^1(S^{2n+1})$ contact form:

  $\theta(\xi) = 0, \quad d\theta(\xi, X) = 0$ for all X, $\quad \theta \wedge (d\theta)^n$ volume form

- Let $\gamma : S^{2n+1} \to M(r, \mathbb{C})$. Study index theory of:

$$P_\gamma = \iota\gamma(\xi \otimes I_r) + (\Delta_H) \otimes I_r$$

  (It's Fredholm when $\lambda I_r - \gamma(x) \in GL(n, \mathbb{C})$ for all $x \in S^{2n+1}$ and $\lambda \in \{\ldots, -n-4, -n-2, -n, n, n+2, n+4, \ldots\}$.)

Motivation 2

Cheeger, Jeff . On the spectral geometry of spaces with cone-like singularities. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 76 (1979), no. 5, 2103–2106.

Analysis on complement of singular locus:

- Hodge thm: L^2-harmonic forms are L^2-cohomology...
- (L^2-cohomology dual to intersection homology.)
- Laplacian admits functional calculus: heat, wave operators
- Asymptotic expansion of trace of the heat kernel: Euler class, Gauss-Bonnet formula, Hirzenbruch signature thm

Cheeger, Jeff ; Goresky, Mark ; MacPherson, Robert . L2-cohomology and intersection homology of singular algebraic varieties. Seminar on Differential Geometry, pp. 303–340, Ann. of Math. Stud., 102, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1982.

Main ingredient: Singular foliations (A + G. Skandalis)

- $(M, \mathcal{F})$ where $\mathcal{F}$ a $C^\infty(M)$-submodule of $\mathcal{X}_c(M)$: locally finitely generated, involutive.
- Holonomy groupoid $\mathrm{Hol}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$: Very "bad", has nice submersions: bisubmersions.
- Strict definitions on bisubmersions. Quotient to $\mathrm{Hol}(\mathcal{F})$:
  - Densities $\rightsquigarrow$ Foliation algebra(s) $C^*(\mathcal{F})$, $C^*_r(\mathcal{F})$
  - psdo kernels with singularities on identity $\rightsquigarrow$ Longitudinal psdo multipliers: $\Psi^*(\mathcal{F})$
  - $0 \to C^*_r(\mathcal{F}) \to \Psi^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sigma} C_0(\mathcal{F}^*) \to 0$
- compact M, $\Delta_{\mathcal{F}} = X_1^2 + \ldots + X_k^2$ elliptic multiplier.

Constant rank 1: Horizontal Laplacian

Consider (M, H, g, μ):

- M compact connected manifold;
- H smooth subbundle of TM;
- g smooth inner product on $C^\infty(M, H)$;
- μ smooth positive density on M, whence inner product on $C^\infty(M)$.

Horizontal differential $d_H : C^\infty(M) \to C^\infty(M, H^*)$ $\qquad d_H f := df|_H$
Adjoint $d_H^* : C^\infty(M, H^*) \to C^\infty(M)$
Horizontal Laplacian $\Delta_H := d_H^* d_H$. Acts on $C^\infty(M)$.

Theorem 1 (Y. Kordyukov)

Δ_H is essentially self-adjoint on $L^2(M, \mu)$.

Constant rank 2: Expressions for Δ_H

- $(\Delta_H u, u) = \int_M \|d_H u(x)\|_g^2 d\mu(x)$, $u \in C^\infty(M)$.
- $X_1, \dots, X_d$ (local) orthonormal frame. $\Delta_H|_\Omega = \sum_{i=1}^d X_i^* X_i$.
- If $H = TM$, locally $g = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j$. Choose *weight* $\mu = \mu(x) dx_1 \dots dx_n$. Then:

$$\Delta_H = -\frac{1}{\mu} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

  If $\mu(x) = \sqrt{\det(g(x))}$, get Laplace-Beltrami operator.

- If H involutive, take foliated coordinates $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$:

$$\Delta_H = -\frac{1}{\mu} \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij}(x,y) \mu(x,y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

  is leafwise elliptic. Different from family of Laplace-Beltrami operators of Riemannian metrics along leaves.

Constant rank 2: Longitudinal calculus

Let (M, H, g, μ) as before. Put $\mathcal{H} = C^\infty(M, H)$ and

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = [\mathcal{H}, \ldots, [\mathcal{H}, \mathcal{H}]]$$

Assume $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ is locally finitely generated, *i.e.* a (singular) foliation.
Sobolev scale: For $s \geqslant 0$, consider:

$$\Lambda_s \in \Psi^s(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}) \text{ with symbol } (1 + \|\xi\|)^s \text{ on every bisubmersion}$$

Put

$$H^s(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}) = \{u \in L^2(M) : \Lambda_s u \in L^2(M)\}, \quad \|u\|_s^2 = \|\Lambda_s u\|^2 + \|u\|^2$$

Theorem 2 (Y. Kordyukov)

Δ_H is hypoelliptic on Sobolev scale $H^s(\mathcal{F}_H)$:

1. There exists $\epsilon > 0$ such that $\|u\|_{s+\epsilon}^2 \leqslant C_s \left(\|\Delta_H u\|_s^2 + \|u\|_s^2\right)$, where $\|\cdot\|_s$ is the norm in $H^s(\mathcal{F}_H)$.
2. If $u \in H^{-\infty}(\mathcal{F}_H)$ such that $\Delta_H u \in H^s(\mathcal{F}_H)$ for some $s \in \mathbb{R}$, then $u \in H^{s+\epsilon}(\mathcal{F}_H)$.

Constant rank 4: Spectrum

Let $\tilde{L}$ the holonomy cover of a leaf L of $\mathcal{F}_H$.

Definition

- Spectrum of Δ_H (as an operator on $L^2(M,\mu)$) is $\sigma(\Delta_H)$.
- Leafwise spectrum of Δ_H is

$$\sigma_{\mathcal{F}}(\Delta_H) := \overline{\bigcup\{\sigma(\Delta_{\tilde{L}}) : L \in M/\mathcal{F}_{\mathcal{H}}\}}$$

Theorem 3

1. $\sigma_{\mathcal{F}}(\Delta_H) \subseteq \sigma(\Delta_H)$
2. If the holonomy groupoid is amenable, then $\sigma(\Delta_H) = \sigma_{\mathcal{F}}(\Delta_H)$.

Proof.
When $\mathcal{F}_H$ regular, *can* construct parametrix following Rothschild-Stein. □

Smooth Distributions (Generalised)

- M smooth manifold,
- $\mathcal{D}$ a $C^\infty(M)$-submodule of $\mathcal{X}_c(M)$,
- $U \subseteq M$ open

- restriction $\mathcal{D}|_U$ is $C^\infty(U)$-submodule of $\mathcal{X}(U)$ generated by

$$f \cdot X|_U \qquad f \in C_c^\infty(U), \quad X \in \mathcal{D}$$

- Say $\mathcal{D}$ is locally finitely generated if every $x \in M$ has open nhd U and $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{D}$ such that

$$\mathcal{D}|_U = C_c^\infty(U) \cdot X_1|_U + \ldots + C_c^\infty(U) \cdot X_k|_U$$

Definition

Smooth (genrealised) distribution: $(M, \mathcal{D})$ locally finitely generated $C^\infty(M)$-submodule of $\mathcal{X}_c(M)$.

Examples

1. Foliations (singular): $(M, \mathcal{F})$ as above, + involutive: $[\mathcal{F}, \mathcal{F}] \subseteq \mathcal{F}$.
2. *e.g.* $\mathcal{F}$ all vector fields of $\mathbb{R}^2$ vanishing at origin. Equivalently, action of $GL(2, \mathbb{R})$...
3. Not(!) foliation: $M = \mathbb{R}^2$, $\qquad \mathcal{D} = \langle \partial_x, e^{-\frac{1}{x^2}} \partial_y \rangle$
4. Sub-Riemannian structures. General picture:
   - Agrachev et al, Bellaïche: Anchored vector bundle $\rho : E \to TM$
   - $\mathcal{D} = \rho(\Gamma_c E) \subseteq \mathcal{X}_c(M)$.
   - Contact structures, Heisenberg group, all non-equiregular Sub-Riemannian str.,
5. $\mathcal{U}(\mathcal{D}) = [\mathcal{D}, \ldots, [\mathcal{D}, \mathcal{D}]]$. Sometimes it's a foliation... Not(!) for example 3!
6. When M is Sub-Riemannian: $\mathcal{U}(\mathcal{D}) = \mathcal{X}_c(M)$.

The problem

Attach to any smooth distribution $(M, \mathcal{D})$ a "sum of squares" Laplacian

$$\Delta_{\mathcal{D}} : C_c^\infty(M) \to C_c^\infty(M)$$

in a geometric way. For real spectrum, needs to be self-adjoint. What about ellipticity?

Ingredients for (geometric) Laplacian:

- "Horizontal" differential $d_{\mathcal{D}}$.
- Riemannian metric.
- Adjoint $d^*_{\mathcal{D}}$.

Local presentations, Part I

Restriction of $(M, \mathcal{D})$:

Let $x_0 \in M$. In an open neighborhood U about x_0, $\mathcal{D}$ is generated by $X_1, \ldots, X_k$, so $\mathcal{D}|_U$ comes from an anchored vector bundle:

- $E_U = U \times \mathbb{R}^k \to U$
- $\rho_U : E_U \to TM, \quad \rho_U(y, (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)) = \sum_{i=1}^k \lambda_i X_i(y)$

Number of generators k can be chosen to be minimal:

Proposition (A-Skandalis)

If the classes of $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{D}$ are a basis of the vector space

$$\mathcal{D}_{x_0} = \mathcal{D}/I_{x_0}\mathcal{D}$$

then $X_1|_U, \ldots, X_k|_U$ are generators of $\mathcal{D}|_U$.

Local presentations, Part II

Definition-Proposition

- $\mathcal{D}_{x_0}$ is the fiber of $\mathcal{D}$ at x_0.
- There is an evaluation map $ev_{x_0} : \mathcal{D}_{x_0} \to D_{x_0} \leqslant T_{x_0}M$.
- Dimension of $\{\mathcal{D}_x\}_{x \in M}$ upper semicontinuous.
- $\rho_U : E_U \to TM$ is a minimal local presentation of $(M, \mathcal{D})$ at x_0.

$$\begin{tikzcd} (E_U)_x \arrow[r, two heads, "\hat{\rho}_{U,x}"] \arrow[dr, "\rho_{U,x}"'] & \mathcal{D}_x \arrow[d, "ev_x"] \\ & D_x \end{tikzcd} \tag{1}$$

Example: $M = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = \langle x\partial_x, y\partial_x, x\partial_y, y\partial_y \rangle$

- $(x, y) \neq (0, 0)$: $\mathcal{F}_{(x,y)} = \mathbb{R}^2$
- $\mathcal{F}_{(0,0)} = \mathbb{R}^4$

Equivalence of local presentations

Let U, V open neighborhoods of x_0. (E_U, ρ_U) and (E_V, ρ_V) are equivalent if there is nhd W of x_0 and (E_W, ρ_W) such that:

$$
\begin{tikzcd}
 & E_U \arrow[dr, "\rho_U"] & \\
E_W \arrow[ur, "\phi_{W,U}"] \arrow[rr, "\rho_W"] \arrow[dr, "\phi_{W,V}"'] & & TM \\
 & E_V \arrow[ur, "\rho_V"'] &
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

Proposition

- This is an equivalence relation!
- Any local presentation (E_U, ρ_U) at x_0 maps surjectively to a minimal one at x_0.
- Any two minimal local presentations at x_0 are isomorphic.
- Any two local presentations at x_0 $\rho_i : E_i \to TM$, $i = 1, 2$, are equivalent! (Easy: Put $E_W = E_1 \times_{\rho_1, \rho_2} E_2$.)

The dual of a distribution

Put $\mathcal{D}^* = \bigcup_{x \in M} \mathcal{D}^*_x$.

Locally compact with the finest topology making these maps continuous:

$$\text{projection } p : \mathcal{D}^* \to M, q(x, \xi) = x;$$
$$q_X : \mathcal{D}^* \to \mathbb{R}, q_X(x, \xi) = \langle \xi, [X]_x \rangle.$$

Smooth sections $\omega^* : x \mapsto \omega^*(x) \in \mathcal{D}^*_x$

The ones which make sense of non-degenerate pairing

$$\langle \ , \ \rangle : C^\infty_c(M, \mathcal{D}^*) \otimes_{C^\infty_c(M)} \mathcal{D} \to C^\infty_c(M)$$

Proposition

$\omega^* \in C^\infty(M, \mathcal{D}^*)$ iff for every $x \in M$

$$\omega^*_U = \widehat{\rho}^*_U \circ \omega^*$$

where ω^*_U is some smooth section of (E^*_U, ρ_U).

Smooth Riemannian metric of $\mathcal{D}^*$

Smooth family of inner products $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{D}^*,x}$ on $\mathcal{D}^*_x$:

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{D}^*} : C^\infty_c(M, \mathcal{D}^*) \times C^\infty_c(M, \mathcal{D}^*) \to C^\infty(M)$$

Local constructions:

- Restrict an inner product $\langle\ ,\ \rangle_{E_U}$ of E^*_U to $\rho^*_U(\mathcal{D}^*_U) \subseteq E^*_U$.
- Equivalently, for every $\xi \in \mathcal{D}_x$ put

$$\|\xi\| = \{\|w\|_{E_U} : w \in E_U, \widehat{\rho}_x(w) = \xi\}$$

Proposition

- $\widehat{\rho}_x : E_{U,x} \to \mathcal{D}_x$ Riemannian submersion
- Different choices of local presentations induce difference by $I_x\mathcal{D}$. Whence $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{D}^*}$ depends only on choice of inner product of local presentations.

Example 1: vector fields in $\mathbb{R}^2$ vanishing at origin

$M = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}$ generated by

$$X_{11} = x\partial_x, \quad X_{12} = y\partial_x, \quad X_{21} = x\partial_y, \quad X_{22} = y\partial_y$$

- Take $E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4$ with the Euclidean inner product. Put

$$\rho : E \to TM, \qquad \rho_{(x,y)}(e_{ij}) = X_{ij}(x, y)$$

- At $(x, y) \neq (0, 0)$, the Riemannian metric on $\mathcal{F}^*_{(x,y)} = \mathbb{R}^2$ is

$$\frac{1}{x^2 + y^2}(dx^2 + dy^2)$$

Example 2: Heisenberg group

$M = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D} = \langle X, Y \rangle$ (projective), where

$$X = \partial_x + \frac{1}{2} y \partial_z, \quad Y = \partial_y + \frac{1}{2} x \partial_z$$

So $\mathcal{D}^*_{(x,y,z)} = \mathbb{R}^2$ at every $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Section $\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{D}^*$ is $\omega(x, y, z) = (\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z))$.

Put g the Euclidean metric on $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$. We find

$$\|\omega(x, y, z)\|^2_{g^{-1}} = (\omega_1(x, y, z))^2 + (\omega_2(x, y, z))^2$$

Remark: Riemannian metric distinguishes singularities...

Take $M = \mathbb{R}$ with foliation $\mathcal{F} = \langle \phi \partial_x \rangle$, where $\phi(0) = 0$.

e.g. $\phi(x) = x$ or x^2 or x^k... Then:

- $\mathcal{F}_x = \mathbb{R}$ for any ϕ
- but metric is $\frac{1}{\phi} dx^2$ (away from zero).

Horizontal $d_{\mathcal{D}}$

$$
\begin{tikzcd}
C_c^\infty(U) \arrow[r, "d"] & \Omega_c^1(U) \arrow[rr, "\rho_U^*"] \arrow[dr, "ev^*"'] & & C_c^\infty(U, E_U^*) \\
& & C_c^\infty(U, \mathcal{D}^*) \arrow[ur, "\widehat{\rho}_U^*"'] &
\end{tikzcd} \tag{3}
$$

- $d_{\mathcal{D}} : C_c^\infty(M) \to C_c^\infty(M, \mathcal{D}^*)$ defined by $d_{\mathcal{D}} = ev^* \circ d$
- $d_{E_U^*} : C_c^\infty(U) \to C_c^\infty(U, E_U^*)$ defined by $d_{E_U^*} = \rho_U^* \circ d$
- "Local presentation":

$$d_{E_U^*} = \widehat{\rho}_U^* \circ d_{\mathcal{D}}.$$

Example: Vector fields of $\mathbb{R}^2$ vanishing at origin

- $X_{11} = x\partial_x, \quad X_{12} = y\partial_x, \quad X_{21} = x\partial_x, \quad X_{22} = y\partial_y$
- At $(0,0)$ take $E_U = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4$. $\rho_U(e_{ij}) = X_{ij}$
- For $\alpha = \alpha_1(x,y)dx + \alpha_2(x,y)dy$ in $\Omega^1_c(\mathbb{R}^2)$ we find:

$$\langle x\partial_x, \alpha\rangle = x\alpha_1(x,y), \quad \langle x\partial_y, \alpha\rangle = x\alpha_2(x,y),$$

$$\langle y\partial_x, \alpha\rangle = y\alpha_1(x,y), \quad \langle y\partial_y, \alpha\rangle = y\alpha_2(x,y)$$

- So, for $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^2)$ we get:

$$d_{E_U} f(x,y) = xf_x(x,y)e^*_{11} + xf_y(x,y)e^*_{12} + yf_x(x,y)e^*_{21} + yf_y(x,y)e^*_{22}.$$

21/33

Horizontal $d^*_{\mathcal{D}}$, Part I

Fix Riemannian metric on $(M, \mathcal{D})$ and positive density μ on M

- Inner product on $C_c^\infty(U, E_U^*)$:

$$(\omega^*_{U,1}, \omega^*_{U,2})_{L^2(U,E_U,\mu)} = \int_U \langle \omega^*_{U,1}(y), \omega^*_{U,2}(y) \rangle_{E^*_{U,x}} d\mu(y)$$

Put $d^*_{E^*_U} : C_c^\infty(U, E_U^*) \to C_c^\infty(U)$ by

$$(d^*_{E^*_U} \omega^*_U, \alpha)_{L^2(U,\mu)} = (\omega^*_U, d_{E^*_U} \alpha)_{L^2(U,E^*_U,\mu)}$$

for all $\omega^*_U \in C_c^\infty(U, E_U^*)$ and $\alpha \in C_c^\infty(U)$.

Horizontal $d^*_{\mathcal{D}}$, Part II

- Inner product on $C^\infty_c(U, \mathcal{D}^*)$:

$$(\omega, \omega')_{L^2(M,\mathcal{D}^*,\mu)} = \int_M \langle \omega, \omega' \rangle_{\mathcal{D}^*}(x) d\mu(x), \quad \omega, \omega' \in C^\infty(M, \mathcal{D}^*)$$

- If $\omega^* \in C^\infty_c(U, \mathcal{D}^*)$ has local presentation $\omega^*_U \in C^\infty_c(U, E^*_U)$, put

$$d^*_{\mathcal{D},U}(\omega^*) = d^*_{E^*_U}(\omega^*_U)$$

Lemma

$d^*_{\mathcal{D},U} : C^\infty_c(U, \mathcal{D}^*) \to C^\infty_c(U)$ is adjoint to $d_{\mathcal{D}}|_U$.

Horizontal $d^*_{\mathcal{D}}$, Part III

If (E_U, ρ_U), (E_V, ρ_V) such that $U \cap V \neq \varnothing$

$$\begin{aligned}(d^*_{\mathcal{D},U}(\omega^*) - d^*_{\mathcal{D},V}(\omega^*), \alpha)_{L^2(U,\mu)} &= \\ &= (\omega^*, d_{\mathcal{D},U})_{L^2(U,\mathcal{D}^*,\mu)} - (\omega^*, d_{\mathcal{D},V})_{L^2(U,\mathcal{D}^*,\mu)} = 0\end{aligned}$$

Proposition

$d^*_{\mathcal{D},U}$ extends to a unique operator $d^*_{\mathcal{D}} : C^\infty_c(M, \mathcal{D}^*) \to C^\infty_c(M)$ which is adjoint to $d_{\mathcal{D}}$.

Example: vector fields in $\mathbb{R}^2$ vanishing at origin

Let $\alpha = \alpha_1(x, y)dx + \alpha_2(x, y)dy$ in $\Omega_c^1(\mathbb{R}^2)$.

Using the inner product on E^*, integrating by parts, etc, we find:

$$d_{\mathcal{D}}^* \alpha(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x}((x^2 + y^2)\alpha_1) - \frac{\partial}{\partial y}((x^2 + y^2)\alpha_2).$$

The horizontal Laplacian

Definition

1. Horizontal Laplacian: $\Delta_{\mathcal{D}} = d_{\mathcal{D}}^{*} \circ d_{\mathcal{D}} : C_c^{\infty}(M) \to C_c^{\infty}(M)$.
2. Restriction: $\Delta_{\mathcal{D},U} = d_{\mathcal{D},U}^{*} \circ (d_{\mathcal{D}}|_U) : C_c^{\infty}(U) \to C_c^{\infty}(U)$.
3. Local presentation: $\Delta_{E_U} = d_{E_U^*}^{*} \circ d_{E_U^*} : C_c^{\infty}(U) \to C_c^{\infty}(U)$.

- $\Delta_{\mathcal{D}} : L^2(M,\mu) \to L^2(M,\mu)$ densely defined, unbounded, differential, second order operator. Domain $C^{\infty}(M)$.
- Integral form:

$$(\Delta_{\mathcal{D}}u, u) = \int_M \|d_{\mathcal{D}}u(x)\|_{\mathcal{D}_x^*}^2 d\mu(x) \text{ for all } u \in C_c^{\infty}(M).$$

- Sum of squares: If $\omega_1, \ldots, \omega_d$ orthonormal frame of E_U, then

$$\Delta_{\mathcal{D},U} = \sum_{i=1}^{d} \rho_U(\omega_i)^* \rho_U(\omega_i)$$

Example: vector fields in $\mathbb{R}^2$ vanishing at origin

Let $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Then

$$\Delta_{\mathcal{D}} f(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x}\left((x^2 + y^2)\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left((x^2 + y^2)\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

"Sum of squares" description:

$$\Delta_{\mathcal{D}} = X_{11}^* X_{11} + X_{12}^* X_{12} + X_{21}^* X_{21} + X_{22}^* X_{22}.$$

Self-adjoint

Theorem

$(M, \mathcal{D})$ smooth distribution, M compact. $C^\infty(M)$.
Then $\Delta_\mathcal{D}$ is essentially self-adjoint.

Proof: Partition of unity ϕ_α. IMS localization formula:

$$\Delta_\mathcal{D} = \sum_{\alpha=1}^{k} \phi_\alpha \Delta_{\mathcal{D},U_\alpha} \phi_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{k} [[\Delta_\mathcal{D}, \phi_\alpha], \phi_\alpha] = A + B$$

Apply Kato-Rellich theorem:

- B bounded.
- $\Delta_{\mathcal{D},U_\alpha} = \sum_{j=1}^{d_\alpha} (X_j^{(\alpha)})^* X_j^{(\alpha)}$
- Put $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M, \mathbb{C}^N)$, $(Du)_j^\alpha = X_j^\alpha(\phi_\alpha u)$.
  Symmetric $S = \begin{pmatrix} 0 & D^* \\ D & 0 \end{pmatrix}$ on $L^2(M, \mu) \oplus L^2(M, \mathbb{C}^N, \mu)$.
- Chernoff's thm for skew-symmetric $L = iS \Rightarrow S^n$ ess. self-adj.
- $S^2 = \begin{pmatrix} D^*D & 0 \\ 0 & DD^* \end{pmatrix}$ and $A = D^*D$.

28/33

Symbol of horizontal Laplacian, Part I

- Viewpoint 1: $\Delta_{\mathcal{D}}$ in standard psdo calculus of M. Then, symbol is
$$\sigma_{\Delta_{\mathcal{D},U}}(x, \xi) = \|ev_x^*(\xi)\|^2_{\mathcal{D}_x^*}$$
for all $x \in U$, $\xi \in T_x^*M$.

- Viewpoint 2: Say $\mathcal{F} = \mathcal{U}(\mathcal{D})$ is a foliation. Then $\Delta_{\mathcal{D}}$ in longitudinal psdo calculus of $\mathcal{F}$ (A-Skandalis).

  Inclusion $\iota^* : \mathcal{F}^* \to \mathcal{D}^*$ is continuous. Symbol is
$$\sigma_{\Delta_{\mathcal{D}}}(x, \xi) = \|\iota_x^*(\xi)\|^2_{\mathcal{D}_x^*}$$
  for all $x \in M$, $\xi \in \mathcal{F}_x^*$.

For M Sub-Riemannian, have bracket-generating condition $\mathcal{U}(\mathcal{D}) = \mathcal{X}(M)$.

So longitudinal calculus is standard calculus on M.

Symbol of horizontal Laplacian, Part II

Remark

Longitudinal symbol vanishes outside the zero section of $\mathcal{F}^*$.

Specifically, it vanishes on the subset

$$\coprod_{x \in M} \{\xi \in \mathcal{F}_x^* : \xi\big|_{\iota_x(\mathcal{D}_x)} = 0\}$$

Whence, $\Delta_{\mathcal{D}}$ may not be elliptic in the longitudinal pseudodifferential calculus of $(M, \mathcal{F})$.

Longitudinal hypoellipticity

M compact. Fix longitudinal elliptic operator Λ_s in $\Psi^s(\mathcal{F})$.

- Any $A \in \Psi^m(\mathcal{F})$ gives a bounded $A : H^s(\mathcal{F}) \to H^{s-m}(\mathcal{F})$, for all $s \in \mathbb{R}$.
- For $s \in \mathbb{Z}$, $C^\infty(M)$ is dense in $H^s(\mathcal{F})$.

Theorem 1: Subelliptic estimates for $\Delta_{\mathcal{D}}$.

There exists $\epsilon > 0$ such that, for any $s \in \mathbb{R}$, we have

$$\|u\|_{s+\epsilon}^2 \leqslant C_s \left(\|\Delta_{\mathcal{D}} u\|_s^2 + \|u\|_s^2\right), \quad u \in C^\infty(M),$$

where $C_s > 0$ is some constant.

Theorem 2: Longitudinal hypoellipticity of $\Delta_{\mathcal{D}}$.

If $u \in H^{-\infty}(\mathcal{F}) := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} H^t(\mathcal{F})$ such that $\Delta_{\mathcal{D}} u \in H^s(\mathcal{F})$ for some $s \in \mathbb{R}$, then $u \in H^{s+\varepsilon}(\mathcal{F})$.

Other thoughts...

- Can we use the Riemannian metric to make sense of angles on the "bundle" $\mathcal{F}^*$?
- Construct a kind of Euler class?
- Let $(M, \mathcal{F})$ singular foliation. de Rham complex

$$C^\infty(M) \xrightarrow{d_\mathcal{F}} C^\infty(M, \mathcal{F}^*) \xrightarrow{d_\mathcal{F}} C^\infty(M, \Lambda^2\mathcal{F}^*) \xrightarrow{d_\mathcal{F}} \dots$$

  does not "see" singularities. *e.g.* for $GL(2)$-action gives just re Rham cohomology of $\mathbb{R}^2$.

Using Riemannian metric, we can make sense of L^2-cohomology...

- Prove a Hodge theorem...
- Find eigenfunctions of the Laplacian...
- Trace? $\rightsquigarrow$ Euler class?
- Torsion formula?

Work in progress 2: Other hypoelliptic operators? Noncommutative symbols?

e.g. Grushin plane:

$$M = \mathbb{R}^2, \qquad X = \partial_x, \qquad Y = x\partial_y, \qquad D = X^2 + Y$$

Need to consider a filtration, *i.e.*

$$\mathcal{D}_1 = \langle X \rangle \subseteq \mathcal{D}^2 = \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$$

or

$$\mathcal{D}^1 = \langle X \rangle \subseteq \mathcal{D}^2 = \langle X, Y \rangle \subseteq \mathcal{D}^3 = \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$$

There is a nice (singular) foliation on $M \times \mathbb{R}$:

$$t\widetilde{\mathcal{D}^1} + t^2\widetilde{\mathcal{D}^2} + t^3\widetilde{\mathcal{D}}^3$$

(And a nice $\mathbb{R}_*^+$-action...)

- Recover Heisenberg calculus using the foliation groupoid?

Thank you!