

# Υπολογίσιμες Συναρτήσεις



ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΤΖΙΜΑΣ

Δ' ΤΟΜΕΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

# Υπολογίσιμες Συναρτήσεις



- Μία συνάρτηση  $f$  καλείται **υπολογίσιμη** αν υπάρχει μία μηχανική διαδικασία που αποτελείται από πεπερασμένα καλά ορισμένα βήματα η οποία για κάθε στοιχείο  $x$  του πεδίου ορισμού της  $f$  προσδιορίζει σωστά την τιμή της  $f(x)$ .

# Υπολογίσιμες Συναρτήσεις



- Μία συνάρτηση  $f$  καλείται **υπολογίσιμη** αν υπάρχει μία *μηχανική διαδικασία που αποτελείται από πεπερασμένα καλά ορισμένα βήματα* η οποία για κάθε στοιχείο  $x$  του πεδίου ορισμού της  $f$  προσδιορίζει σωστά την τιμή της  $f(x)$ .
  - Μια τέτοια *μηχανική διαδικασία* καλείται **αλγόριθμος**.

# Υπολογίσιμες Συναρτήσεις



- Μία συνάρτηση  $f$  καλείται **υπολογίσιμη** αν υπάρχει μία *μηχανική διαδικασία που αποτελείται από πεπερασμένα καλά ορισμένα βήματα* η οποία για κάθε στοιχείο  $x$  του πεδίου ορισμού της  $f$  προσδιορίζει σωστά την τιμή της  $f(x)$ .
  - Μια τέτοια *μηχανική διαδικασία* καλείται **αλγόριθμος**.
- **Παρατήρηση:** Ο ορισμός που δώσαμε είναι **άτυπος**.

# Υπολογίσιμες Συναρτήσεις



- Μία συνάρτηση  $f$  καλείται **υπολογίσιμη** αν υπάρχει μία *μηχανική διαδικασία που αποτελείται από πεπερασμένα καλά ορισμένα βήματα* η οποία για κάθε στοιχείο  $x$  του πεδίου ορισμού της  $f$  προσδιορίζει σωστά την τιμή της  $f(x)$ .
  - Μια τέτοια *μηχανική διαδικασία* καλείται **αλγόριθμος**.
- **Παρατήρηση:** Ο ορισμός που δώσαμε είναι **άτυπος**. Χρειαζόμαστε έναν **τυπικό** ορισμό της υπολογίσιμης συνάρτησης αν θέλουμε, π.χ., να ελέγξουμε αν μία συνάρτηση που μας έδωσαν είναι υπολογίσιμη.

# Επιλύσιμα Προβλήματα



- Ένα πρόβλημα καλείται **επιλύσιμο** αν υπάρχει ένας αλγόριθμος που το *επιλύει* για κάθε **στιγμιότυπό** του.

# Επιλύσιμα Προβλήματα



- Ένα πρόβλημα καλείται **επιλύσιμο** αν υπάρχει ένας αλγόριθμος που το επιλύει για κάθε **στιγμιότυπό** του.
- Υπάρχουν διάφοροι τύποι προβλημάτων.

# Επιλύσιμα Προβλήματα



- Ένα πρόβλημα καλείται **επιλύσιμο** αν υπάρχει ένας **αλγόριθμος** που το **επιλύει** για κάθε **στιγμιότυπό** του.
- Υπάρχουν διάφοροι τύποι προβλημάτων.
  - Ένα πρόβλημα καλείται **πρόβλημα συνάρτησης** αν αφορά μία δεδομένη συνάρτηση και τα στιγμιότυπά του ζητούν να υπολογισθεί στα διάφορα στοιχεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης η εικόνα της.



# Επιλύσιμα Προβλήματα



- Ένα πρόβλημα καλείται **επιλύσιμο** αν υπάρχει ένας **αλγόριθμος** που το **επιλύει** για κάθε **στιγμιότυπό** του.
- Υπάρχουν διάφοροι τύποι προβλημάτων.
  - Ένα πρόβλημα καλείται **πρόβλημα συνάρτησης** αν αφορά μία δεδομένη συνάρτηση και τα στιγμιότυπά του ζητούν να υπολογισθεί στα διάφορα στοιχεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης η εικόνα της.
  - Ένα πρόβλημα καλείται **πρόβλημα απόφασης** αν αφορά ένα δεδομένο σύνολο και τα στιγμιότυπά του ζητούν να ελεγχθεί για τα διάφορα στοιχεία ενός ευρύτερου συνόλου το κατά πόσον είναι στοιχεία του συνόλου του προβλήματος.



# David Hilbert (1862-1943)

Γερμανός μαθηματικός



Ο Hilbert το 1912.



## David Hilbert (1862-1943)

Γερμανός μαθηματικός



Ο Hilbert το 1912.

- Ένας από τους «καθολικούς» μαθηματικούς του προηγούμενου αιώνα με συνεισφορά σε πολλές περιοχές των Μαθηματικών.



## David Hilbert (1862-1943)

Γερμανός μαθηματικός



Ο Hilbert το 1912.

- Ένας από τους «καθολικούς» μαθηματικούς του προηγούμενου αιώνα με συνεισφορά σε πολλές περιοχές των Μαθηματικών.
- Αναφέρουμε:
  - το Θεώρημα Βάσης του στην Άλγεβρα,

## David Hilbert (1862-1943)

Γερμανός μαθηματικός



Ο Hilbert το 1912.

- Ένας από τους «καθολικούς» μαθηματικούς του προηγούμενου αιώνα με συνεισφορά σε πολλές περιοχές των Μαθηματικών.
- Αναφέρουμε:
  - το Θεώρημα Βάσης του στην **Άλγεβρα**,
  - τα αξιώματά του στην **Γεωμετρία** (την πρότασή του για μια σύγχρονη αξιωματικοποίηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας)

## David Hilbert (1862-1943)

Γερμανός μαθηματικός



Ο Hilbert το 1912.

- Ένας από τους «καθολικούς» μαθηματικούς του προηγούμενου αιώνα με συνεισφορά σε πολλές περιοχές των Μαθηματικών.
- Αναφέρουμε:
  - το Θεώρημα Βάσης του στην **Άλγεβρα**,
  - τα αξιώματά του στην **Γεωμετρία** (την πρότασή του για μια σύγχρονη αξιωματικοποίηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας)
  - και τους χώρους που τώρα φέρουν το όνομά του στην **Ανάλυση**.

David Hilbert  
(1862-1943)

Γερμανός μαθηματικός



Ο Hilbert το 1912.

- Το **1928**, στο πλαίσιο του Διεθνούς Συνεδρίου των Μαθηματικών που διεξήχθη στην Μπολόνια της Ιταλίας, ο Hilbert διατυπώνει τρία ζητήματα θεμελίωσης των Μαθηματικών:



## David Hilbert (1862-1943)

Γερμανός μαθηματικός



Ο Hilbert το 1912.

- Το **1928**, στο πλαίσιο του Διεθνούς Συνεδρίου των Μαθηματικών που διεξήχθη στην Μπολόνια της Ιταλίας, ο Hilbert διατυπώνει τρία ζητήματα θεμελίωσης των Μαθηματικών:
  1. Να αποδειχθεί η **πληρότητα** των Μαθηματικών.



## David Hilbert (1862-1943)

Γερμανός μαθηματικός



Ο Hilbert το 1912.

- Το **1928**, στο πλαίσιο του **Διεθνούς Συνεδρίου των Μαθηματικών** που διεξήχθη στην Μπολόνια της Ιταλίας, ο Hilbert διατυπώνει τρία ζητήματα θεμελίωσης των Μαθηματικών:
  1. Να αποδειχθεί η **πληρότητα** των Μαθηματικών.
  2. Να αποδειχθεί η **συνέπεια** των Μαθηματικών.

## David Hilbert (1862-1943)

Γερμανός μαθηματικός



Ο Hilbert το 1912.

- Το **1928**, στο πλαίσιο του **Διεθνούς Συνεδρίου των Μαθηματικών** που διεξήχθη στην Μπολόνια της Ιταλίας, ο Hilbert διατυπώνει τρία ζητήματα θεμελίωσης των Μαθηματικών:
  1. Να αποδειχθεί η **πληρότητα** των Μαθηματικών.
  2. Να αποδειχθεί η **συνέπεια** των Μαθηματικών.
  3. Το **Πρόβλημα Απόφασης του Hilbert**, να αποδειχθεί η **αποφασισιμότητα** των Μαθηματικών.

# Hilbert's Entscheidungsproblem

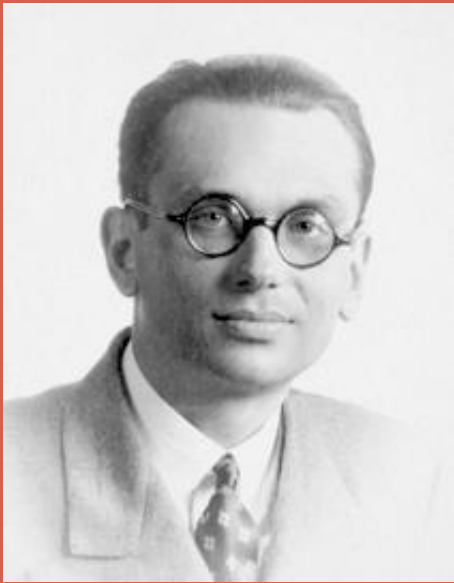


**ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ  
ΠΟΥ ΝΑ ΔΕΧΕΤΑΙ ΩΣ ΕΙΣΟΔΟ  
ΜΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ  
ΚΑΙ ΝΑ ΑΠΟΦΑΣΙΖΕΙ  
ΑΝ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ ΑΛΗΘΗΣ**



# Kurt Gödel (1906-1978)

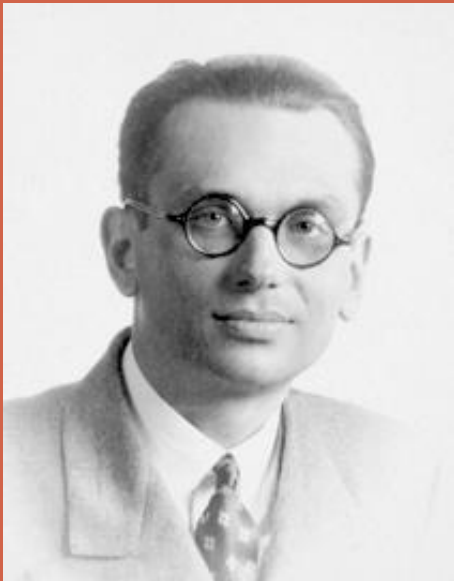
Αυστριακός  
μαθηματικός





## Kurt Gödel (1906-1978)

Αυστριακός  
μαθηματικός

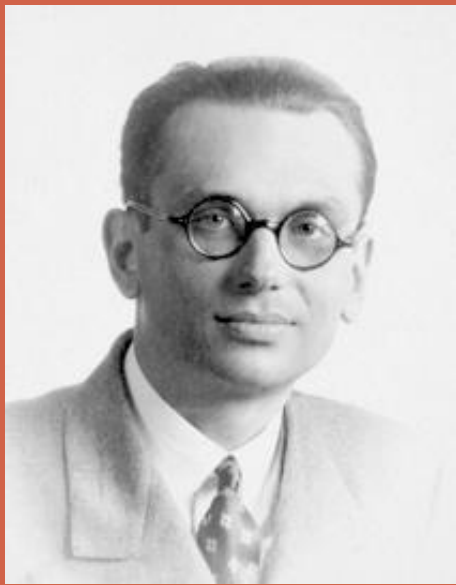


- Αναμφισβήτητα, ένας από τους σημαντικότερους επιστήμονες της λογικής.



## Kurt Gödel (1906-1978)

Αυστριακός  
μαθηματικός

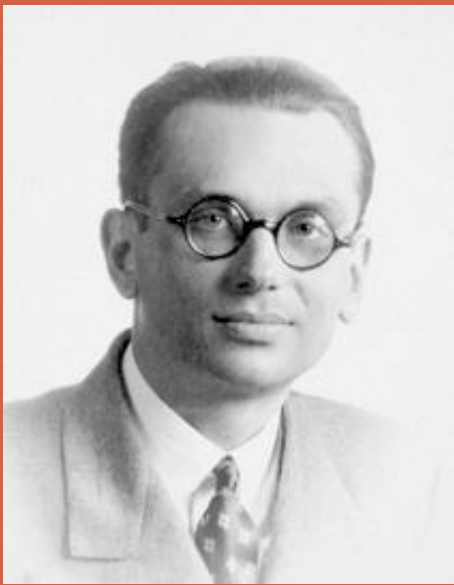


- Αναμφισβήτητα, ένας από τους σημαντικότερους επιστήμονες της λογικής.
- Το **1929**, στο πλαίσιο της διδακτορικής του διατριβής, αποδεικνύει το **Θεώρημα Πληρότητας** της πρωτοβάθμιας λογικής.



## Kurt Gödel (1906-1978)

Αυστριακός  
μαθηματικός

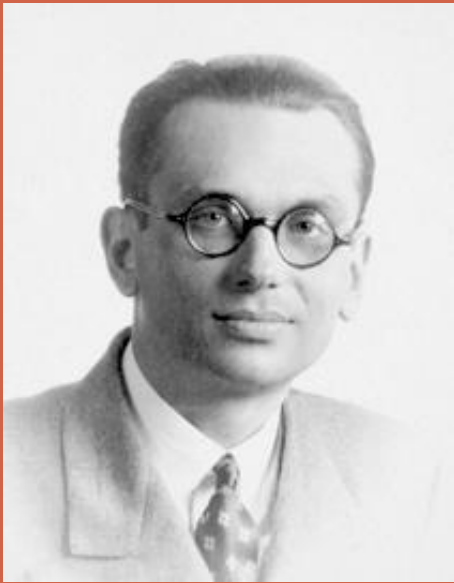


- Αναμφισβήτητα, ένας από τους σημαντικότερους επιστήμονες της λογικής.
- Το **1929**, στο πλαίσιο της διδακτορικής του διατριβής, αποδεικνύει το **Θεώρημα Πληρότητας** της πρωτοβάθμιας λογικής.
- Το **1931**, ένα έτος μετά το πέρας των διδακτορικών του σπουδών, αποδεικνύει και τα περίφημα **Θεωρήματα Μη-Πληρότητάς** του.



## Kurt Gödel (1906-1978)

Αυστριακός  
μαθηματικός



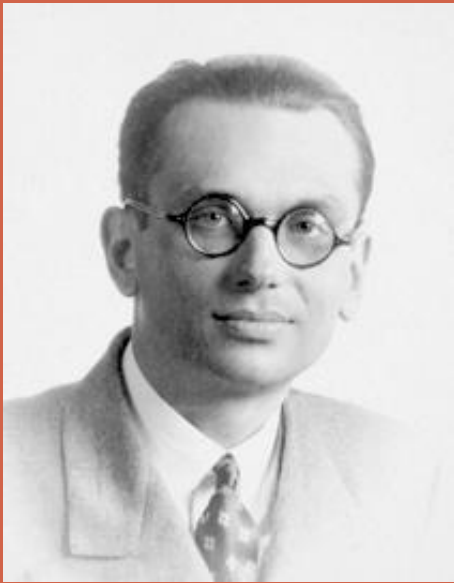
- Στη συνέχεια στρέφεται στη μελέτη των αναδρομικών συναρτήσεων και το **1933** εισάγει την έννοια των **μ-αναδρομικών συναρτήσεων**.





## Kurt Gödel (1906-1978)

Αυστριακός  
μαθηματικός

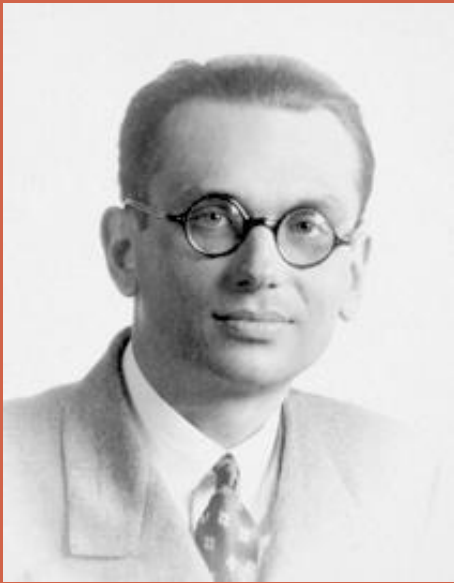


- Στη συνέχεια στρέφεται στη μελέτη των αναδρομικών συναρτήσεων και το **1933** εισάγει την έννοια των **μ-αναδρομικών συναρτήσεων**.
- Αυτές περιλαμβάνουν:



## Kurt Gödel (1906-1978)

Αυστριακός  
μαθηματικός

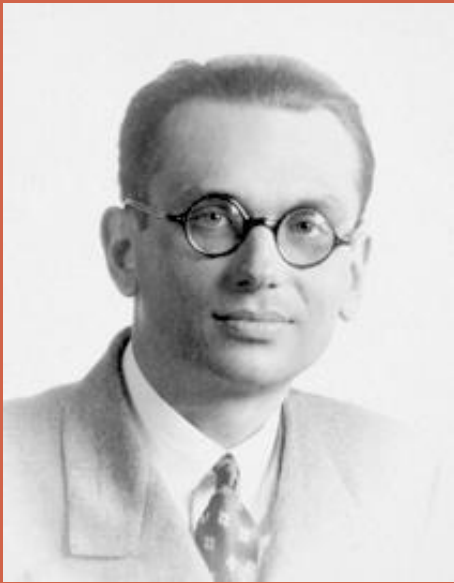


- Στη συνέχεια στρέφεται στη μελέτη των αναδρομικών συναρτήσεων και το **1933** εισάγει την έννοια των **μ-αναδρομικών συναρτήσεων**.
- Αυτές περιλαμβάνουν:
  - τις σταθερές συναρτήσεις και



## Kurt Gödel (1906-1978)

Αυστριακός  
μαθηματικός

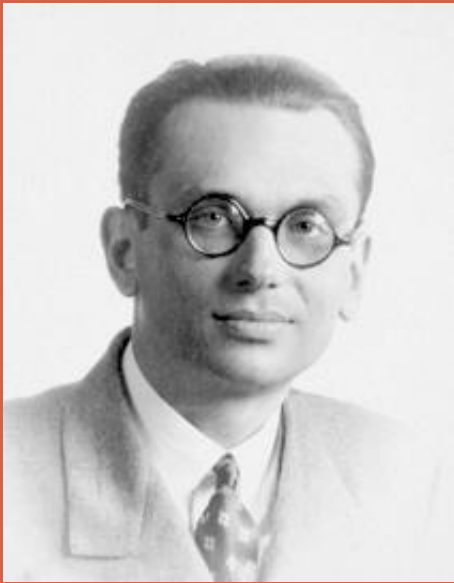


- Στη συνέχεια στρέφεται στη μελέτη των αναδρομικών συναρτήσεων και το **1933** εισάγει την έννοια των **μ-αναδρομικών συναρτήσεων**.
- Αυτές περιλαμβάνουν:
  - τις σταθερές συναρτήσεις και
  - τη συνάρτηση του απογόνου.



## Kurt Gödel (1906-1978)

Αυστριακός  
μαθηματικός



- Στη συνέχεια στρέφεται στη μελέτη των αναδρομικών συναρτήσεων και το **1933** εισάγει την έννοια των **μ-αναδρομικών συναρτήσεων**.
- Αυτές περιλαμβάνουν:
  - τις σταθερές συναρτήσεις και
  - τη συνάρτηση του απογόνου.
- και είναι κλειστές κάτω από:



## Kurt Gödel (1906-1978)

Αυστριακός  
μαθηματικός



- Στη συνέχεια στρέφεται στη μελέτη των αναδρομικών συναρτήσεων και το **1933** εισάγει την έννοια των **μ-αναδρομικών συναρτήσεων**.
- Αυτές περιλαμβάνουν:
  - τις σταθερές συναρτήσεις και
  - τη συνάρτηση του απογόνου.
- και είναι κλειστές κάτω από:
  - σύνθεση,



## Kurt Gödel (1906-1978)

Αυστριακός  
μαθηματικός



- Στη συνέχεια στρέφεται στη μελέτη των αναδρομικών συναρτήσεων και το **1933** εισάγει την έννοια των **μ-αναδρομικών συναρτήσεων**.
- Αυτές περιλαμβάνουν:
  - τις σταθερές συναρτήσεις και
  - τη συνάρτηση του απογόνου.
- και είναι κλειστές κάτω από:
  - σύνθεση,
  - αναδρομή και



## Kurt Gödel (1906-1978)

Αυστριακός  
μαθηματικός



- Στη συνέχεια στρέφεται στη μελέτη των αναδρομικών συναρτήσεων και το **1933** εισάγει την έννοια των **μ-αναδρομικών συναρτήσεων**.
- Αυτές περιλαμβάνουν:
  - τις σταθερές συναρτήσεις και
  - τη συνάρτηση του απογόνου.
- και είναι κλειστές κάτω από:
  - σύνθεση,
  - αναδρομή και
  - ελαχιστοποίηση.

# Η Συνάρτηση Ackermann



$$A : (\mathbb{N}^+)^2 \rightarrow \mathbb{N}^+$$

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1 & , \text{ if } m = 0 \\ A(m - 1, 1) & , \text{ if } m \neq 0 \text{ and } n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)) & , \text{ if } m \neq 0 \text{ and } n \neq 0 \end{cases}$$

$n$	0	1	2	3	4
$m$					
0	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	5	7	9	11
3	5	13	29	61	125
4	13	65533	$2^{65536} - 3$	$2^{2^{65536}} - 3$	$2^{2^{2^{65536}}} - 3$





## Alonzo Church (1903-1995)

Αμερικανός  
μαθηματικός



- Ακόμα ένας μαθηματικός με μεγάλη συνεισφορά στη Μαθηματική Λογική.



## Alonzo Church (1903-1995)

Αμερικανός  
μαθηματικός



- Ακόμα ένας μαθηματικός με μεγάλη συνεισφορά στη Μαθηματική Λογική.
- Το **1936** αποδεικνύει ότι το Πρόβλημα Απόφασης του Hilbert, **ΔΕΝ** είναι επιλύσιμο.



## Alonzo Church (1903-1995)

Αμερικανός  
μαθηματικός



- Ακόμα ένας μαθηματικός με μεγάλη συνεισφορά στη Μαθηματική Λογική.
- Το **1936** αποδεικνύει ότι το Πρόβλημα Απόφασης του Hilbert, **ΔΕΝ** είναι επιλύσιμο.
- Είναι περισσότερο γνωστός για το μαθηματικό μοντέλο υπολογισμού που ο ίδιος εισήγαγε και στη συνέχεια χρησιμοποίησε για την απόδειξη της μη-επιλυσιμότητας, τον **Λογισμό Λάμδα (λ-calculus)**.



## Alonzo Church (1903-1995)

Αμερικανός  
μαθηματικός



- Ο Λογισμός Λάμδα περιγράφει την κατασκευή των **λ-εκφράσεων**.

## Alonzo Church (1903-1995)

Αμερικανός  
μαθηματικός

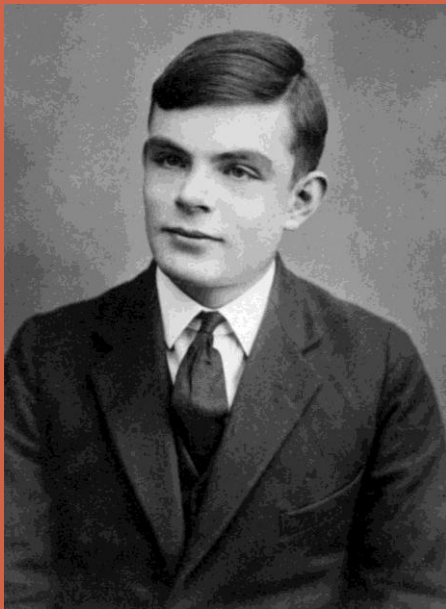


- Ο Λογισμός Λάμδα περιγράφει την κατασκευή των **λ-εκφράσεων**.
- Μία συνάρτηση  $F$  καλείται **λ-υπολογίσιμη** αν υπάρχει λ-έκφραση  $f$  τέτοια ώστε για κάθε  $x, y$  του πεδίου ορισμού της  $F$  να ισχύει ότι  $F(x) = y$  αν και μόνο αν  $f x \approx y$  σύμφωνα με μία έννοια ισοδυναμίας που ορίζεται στον Λογισμό Λάμδα.




# Alan Turing (1912-1954)

Βρετανός μαθηματικός

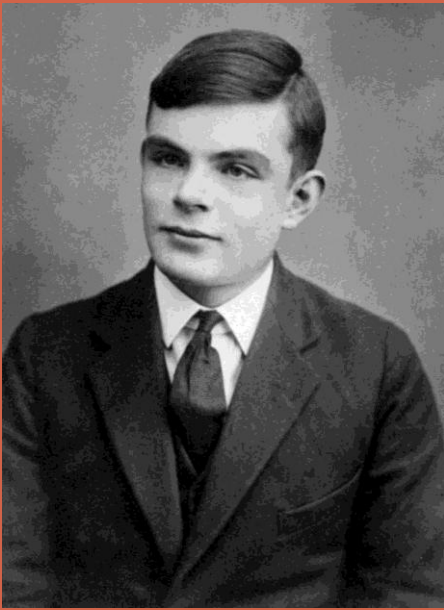


Ο Turing το 1927.



## Alan Turing (1912-1954)

Βρετανός μαθηματικός



Ο Turing το 1927.


- Είναι γνωστός στο ευρύ κοινό ως αυτός που «έσπασε» τον κώδικα κρυπτογράφησης της μηχανής **Enigma** που χρησιμοποιούνταν κατά τη διάρκεια του Δευτέρου Παγκόσμιου Πόλεμου από τις στρατιωτικές δυνάμεις του Άξονα για την μεταξύ τους επικοινωνία.

# Ο Alan Turing στον Κινηματογράφο



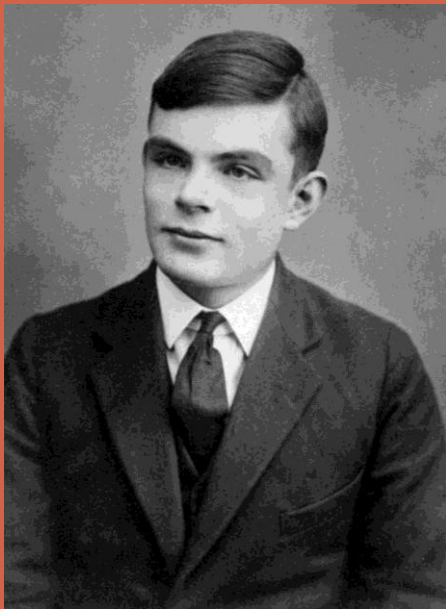
- **The Imitation Game**
  - Έτος Κυκλοφορίας: 2014
  - Είδος: Ιστορικό Δράμα






## Alan Turing (1912-1954)

Βρετανός μαθηματικός



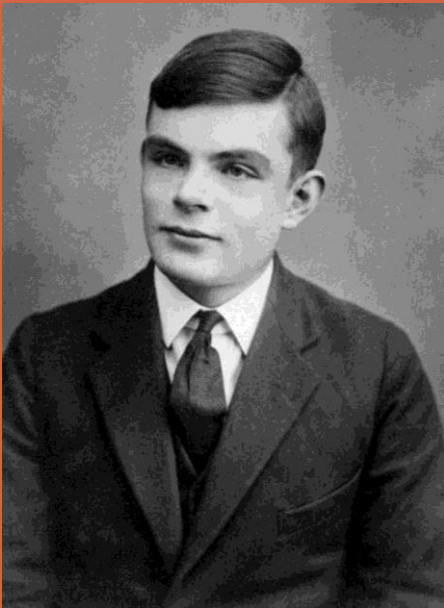
Ο Turing το 1927.

- Είναι γνωστός στο ευρύ κοινό ως αυτός που «έσπασε» τον κώδικα κρυπτογράφησης της μηχανής **Enigma** που χρησιμοποιούνταν κατά τη διάρκεια του Δευτέρου Παγκόσμιου Πόλεμου από τις στρατιωτικές δυνάμεις του Άξονα για την μεταξύ τους επικοινωνία.
- Πήρε το διδακτορικό του το **1938** από το Πανεπιστήμιο του Princeton όπου φοίτησε υπό την επίβλεψη του Church.




## Alan Turing (1912-1954)

Βρετανός μαθηματικός



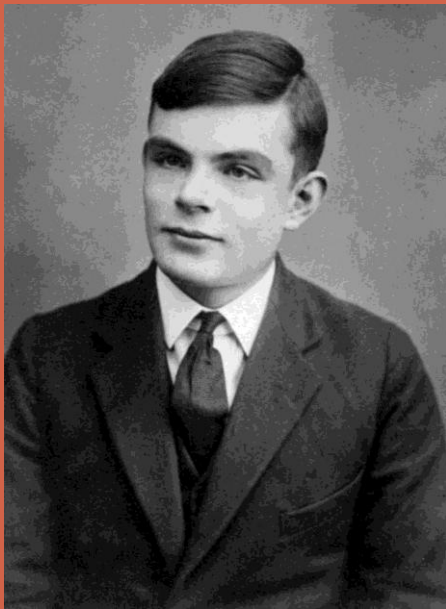
Ο Turing το 1927.

- Ευρέως θεωρούμενος ως ο «πατέρας» της (Θεωρητικής) Επιστήμης των Υπολογιστών.




## Alan Turing (1912-1954)

Βρετανός μαθηματικός



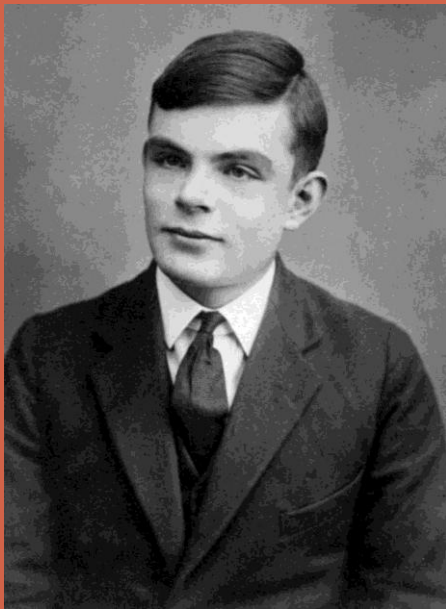
Ο Turing το 1927.

- Ευρέως θεωρούμενος ως ο «πατέρας» της (Θεωρητικής) Επιστήμης των Υπολογιστών.
- Το **1936**, αμέσως μετά τον Church και ανεξάρτητα από αυτόν, αποδεικνύει ότι το Πρόβλημα Απόφασης του Hilbert δεν είναι επιλύσιμο.



## Alan Turing (1912-1954)

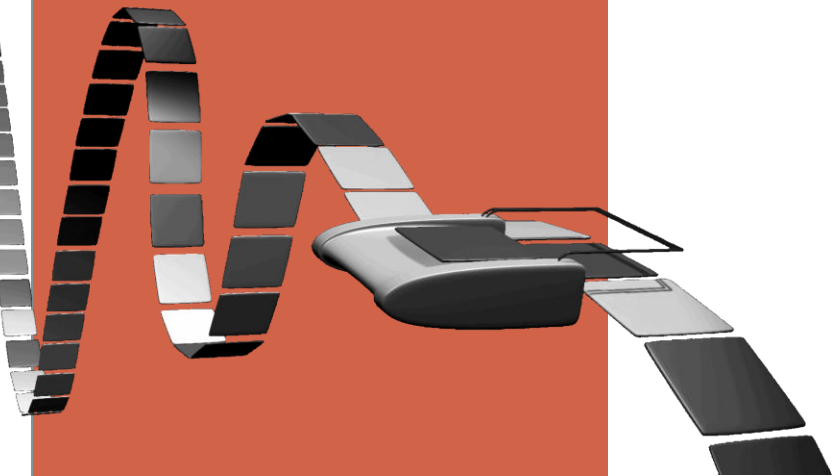
Βρετανός μαθηματικός



Ο Turing το 1927.

- Ευρέως θεωρούμενος ως ο «πατέρας» της (Θεωρητικής) Επιστήμης των Υπολογιστών.
- Το **1936**, αμέσως μετά τον Church και ανεξάρτητα από αυτόν, αποδεικνύει ότι το Πρόβλημα Απόφασης του Hilbert δεν είναι επιλύσιμο.
- Για το σκοπό αυτό εισήγαγε το δικό του μαθηματικό μοντέλο υπολογισμού, την αφηρημένη μηχανή που λέμε **Μηχανή Turing**.

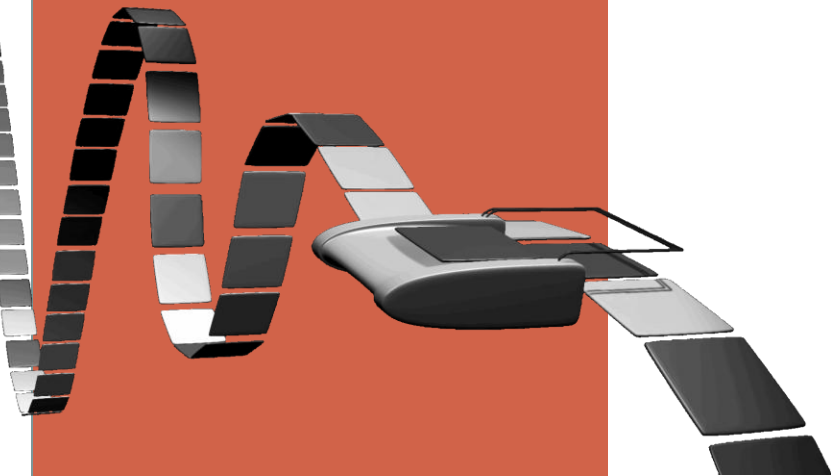
# Μηχανή Turing





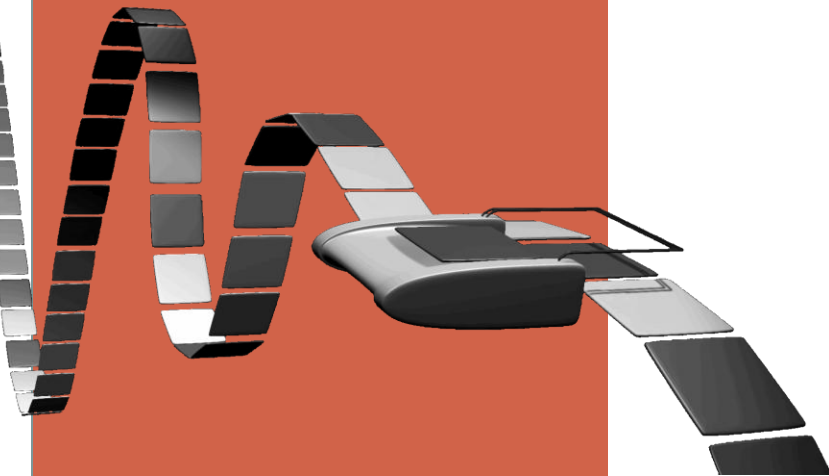
# Μηχανή Turing

- Αποτελείται από τρία μέρη.



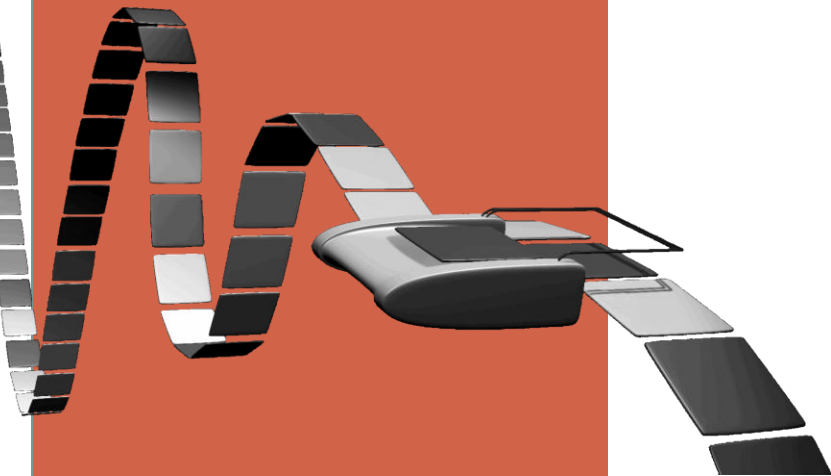
# Μηχανή Turing

- Αποτελείται από τρία μέρη.
  - Μία ταινία που έχει αριστερό άκρο και εκτείνεται προς τα δεξιά στο άπειρο.



# Μηχανή Turing

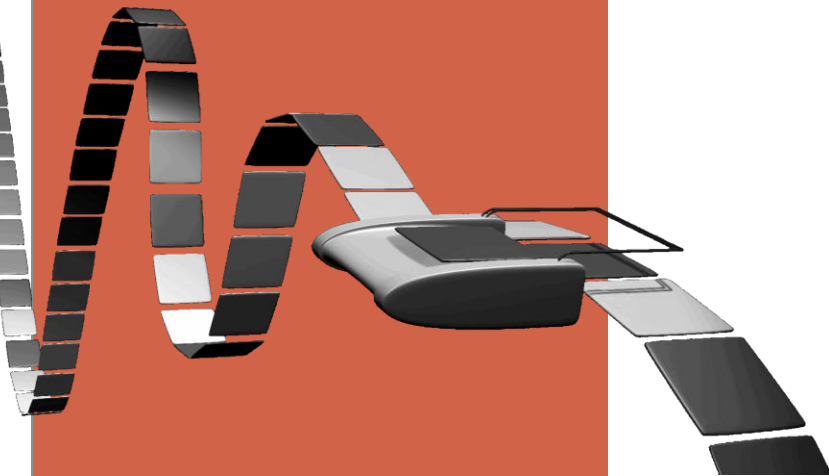
- Αποτελείται από τρία μέρη.
  - Μία **ταινία** που έχει αριστερό άκρο και εκτείνεται προς τα δεξιά στο άπειρο.
  - Μία **κεφαλή** που μπορεί να εκτελέσει τις ακόλουθες λειτουργίες:





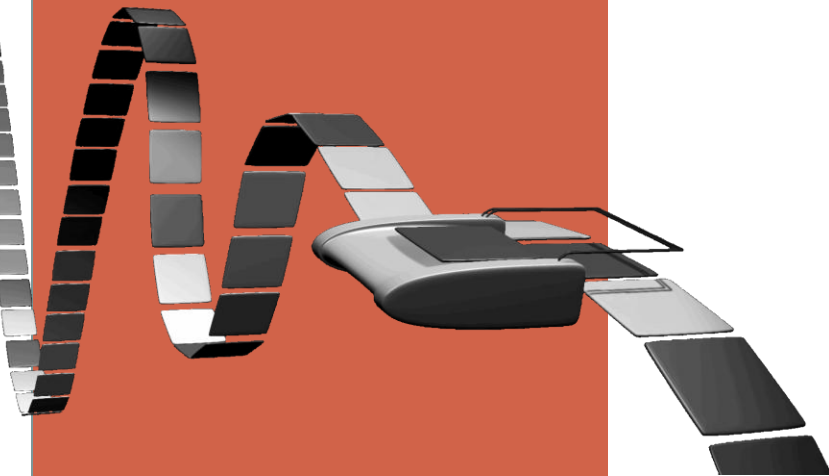
# Μηχανή Turing

- Αποτελείται από τρία μέρη.
  - Μία **ταινία** που έχει αριστερό άκρο και εκτείνεται προς τα δεξιά στο άπειρο.
  - Μία **κεφαλή** που μπορεί να εκτελέσει τις ακόλουθες λειτουργίες:
    - ✦ Ανάγνωση/εγγραφή στην τρέχουσα θέση της πάνω στην ταινία.



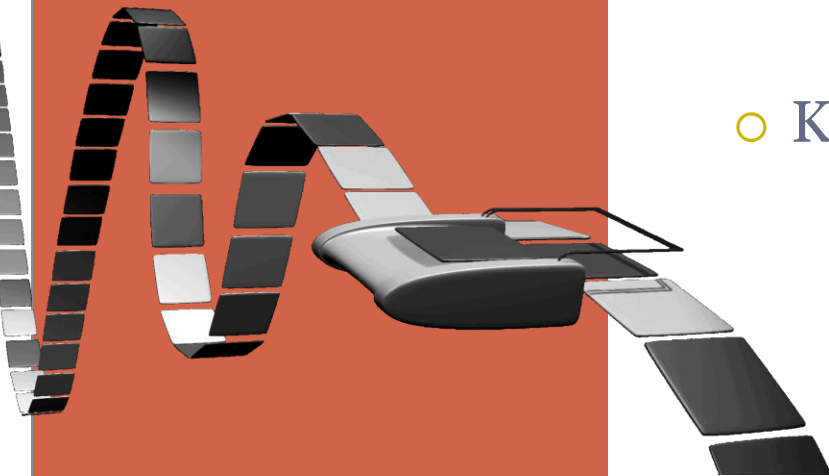
# Μηχανή Turing

- Αποτελείται από τρία μέρη.
  - Μία **ταινία** που έχει αριστερό άκρο και εκτείνεται προς τα δεξιά στο άπειρο.
  - Μία **κεφαλή** που μπορεί να εκτελέσει τις ακόλουθες λειτουργίες:
    - ✦ Ανάγνωση/εγγραφή στην τρέχουσα θέση της πάνω στην ταινία.
    - ✦ Μετακίνηση κατά μία θέση αριστερά/δεξιά πάνω στην ταινία.



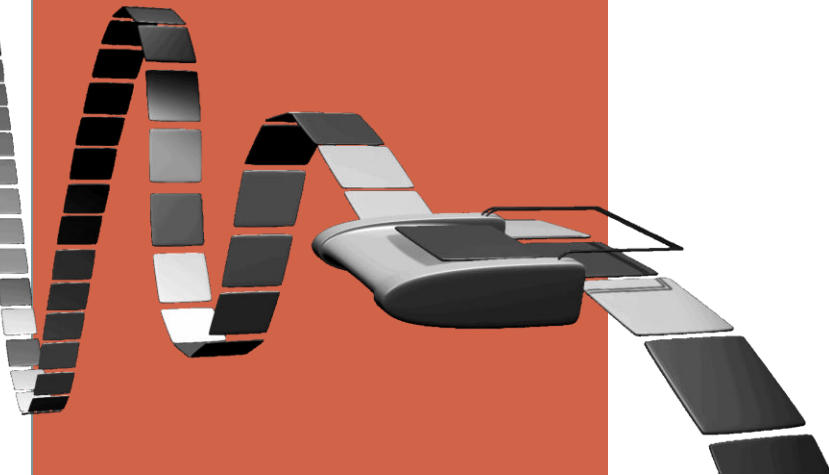
# Μηχανή Turing

- Αποτελείται από τρία μέρη.
  - Μία **ταινία** που έχει αριστερό άκρο και εκτείνεται προς τα δεξιά στο άπειρο.
  - Μία **κεφαλή** που μπορεί να εκτελέσει τις ακόλουθες λειτουργίες:
    - ✦ Ανάγνωση/εγγραφή στην τρέχουσα θέση της πάνω στην ταινία.
    - ✦ Μετακίνηση κατά μία θέση αριστερά/δεξιά πάνω στην ταινία.
  - Και την εσωτερική της **κατάσταση**.



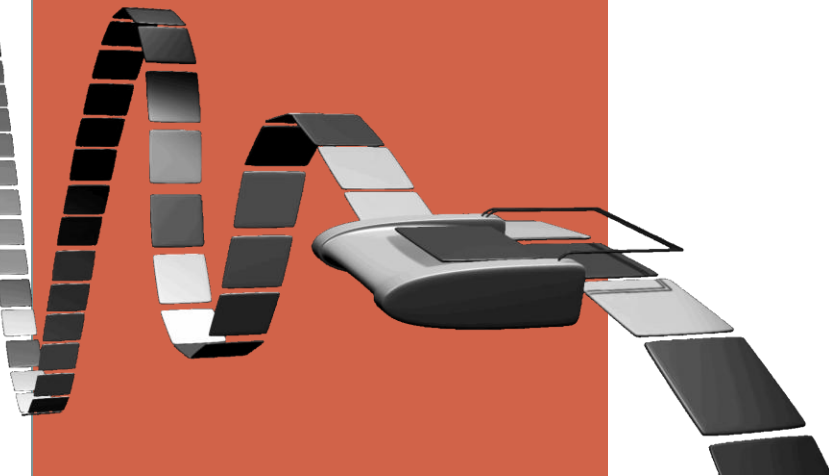
# Μηχανή Turing

- Ξεκινά τη λειτουργία της με την κεφαλή στην αριστερότερη θέση πάνω στην ταινία.



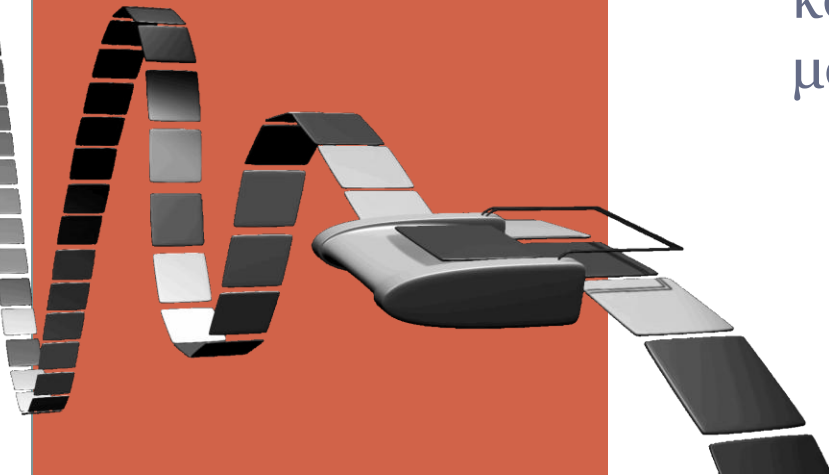
# Μηχανή Turing

- Ξεκινά τη λειτουργία της με την κεφαλή στην αριστερότερη θέση πάνω στην ταινία.
- Σε κάθε βήμα
  - διαβάζει το σύμβολο στην τρέχουσα θέση της κεφαλής πάνω στην ταινία και,



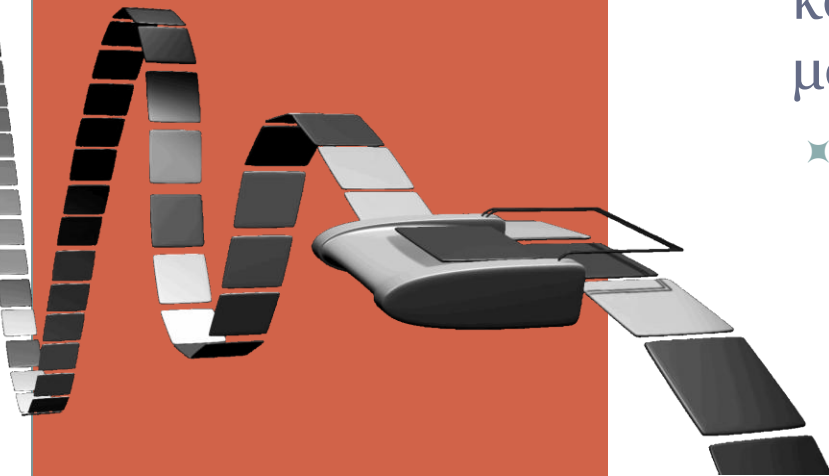
# Μηχανή Turing

- Ξεκινά τη λειτουργία της με την κεφαλή στην αριστερότερη θέση πάνω στην ταινία.
- Σε κάθε βήμα
  - διαβάζει το σύμβολο στην τρέχουσα θέση της κεφαλής πάνω στην ταινία και,
  - συναρτήσσει της εσωτερικής της κατάστασης και του συμβόλου που μόλις διαβάστηκε,



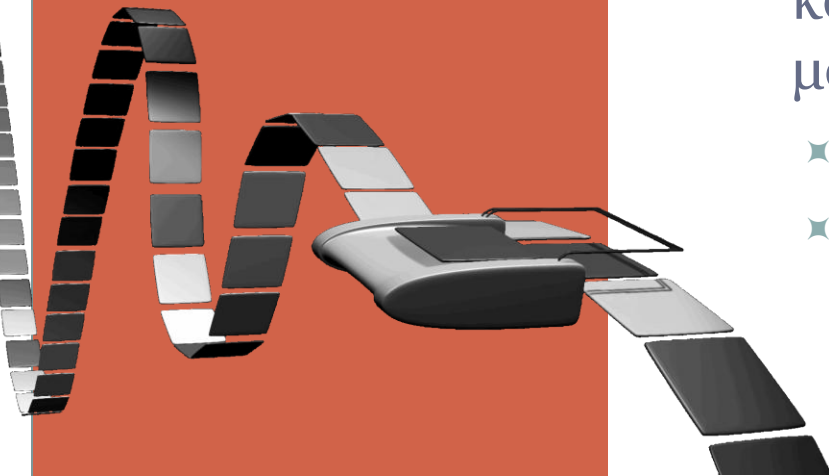
# Μηχανή Turing

- Ξεκινά τη λειτουργία της με την κεφαλή στην αριστερότερη θέση πάνω στην ταινία.
- Σε κάθε βήμα
  - διαβάζει το σύμβολο στην τρέχουσα θέση της κεφαλής πάνω στην ταινία και,
  - συναρτήσσει της εσωτερικής της κατάστασης και του συμβόλου που μόλις διαβάστηκε,
    - ✦ αλλάζει την εσωτερική της κατάσταση,



# Μηχανή Turing

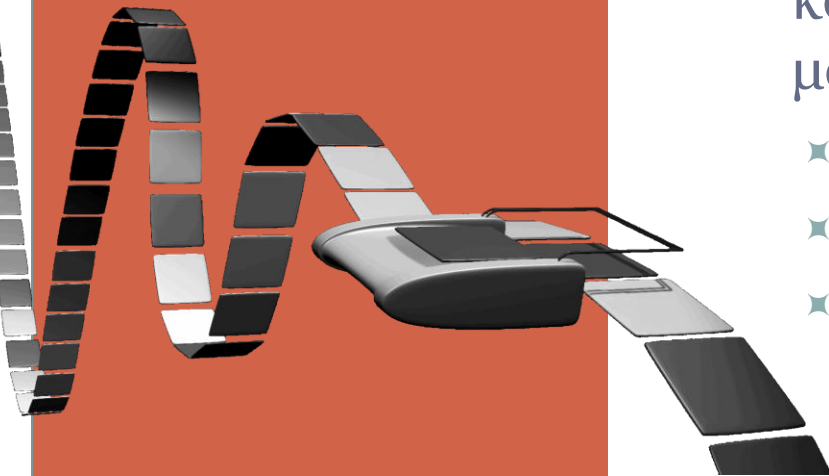
- Ξεκινά τη λειτουργία της με την κεφαλή στην αριστερότερη θέση πάνω στην ταινία.
- Σε κάθε βήμα
  - διαβάζει το σύμβολο στην τρέχουσα θέση της κεφαλής πάνω στην ταινία και,
  - συναρτήσει της εσωτερικής της κατάστασης και του συμβόλου που μόλις διαβάστηκε,
    - ✦ αλλάζει την εσωτερική της κατάσταση,
    - ✦ γράφει ένα σύμβολο στην ίδια θέση και





# Μηχανή Turing

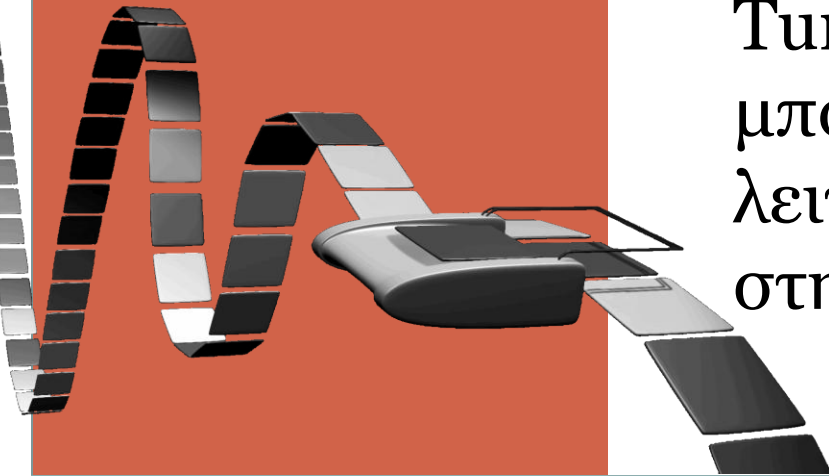
- Ξεκινά τη λειτουργία της με την κεφαλή στην αριστερότερη θέση πάνω στην ταινία.
- Σε κάθε βήμα
  - διαβάζει το σύμβολο στην τρέχουσα θέση της κεφαλής πάνω στην ταινία και,
  - συναρτήσει της εσωτερικής της κατάστασης και του συμβόλου που μόλις διαβάστηκε,
    - ✦ αλλάζει την εσωτερική της κατάσταση,
    - ✦ γράφει ένα σύμβολο στην ίδια θέση και
    - ✦ μετακινεί την κεφαλή πάνω στην ταινία.





## Μηχανή Turing

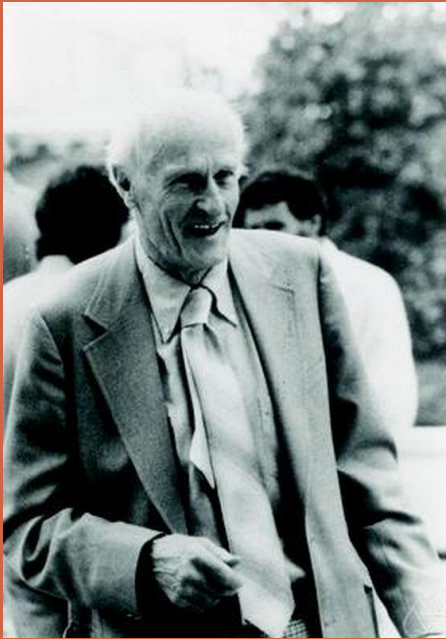
- Για να αποδείξει την μη-επιλυσιμότητα του Προβλήματος Απόφασης του Hilbert, ο Turing κατασκευάζει μία ειδικού τύπου Μηχανή Turing που καλείται **Καθολική Μηχανή Turing** η οποία λαμβάνοντας ως είσοδο μία περιγραφή μία άλλης Μηχανής Turing και μια είσοδο αυτής μπορεί να προσομοιώσει την λειτουργία της δεύτερης πάνω στη δοθείσα είσοδο.





# Steven Kleene (1909-1994)

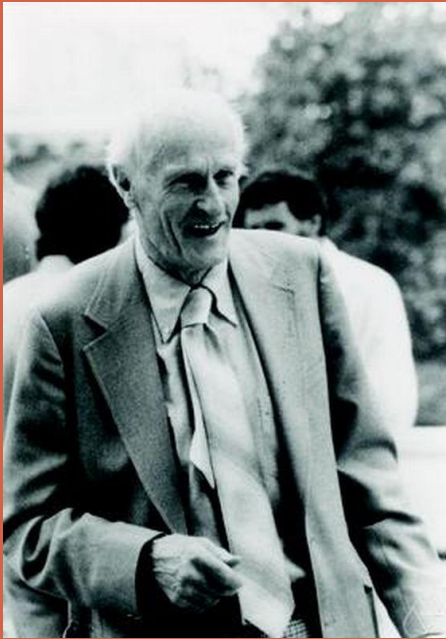
Αμερικανός  
μαθηματικός





## Steven Kleene (1909-1994)

Αμερικανός  
μαθηματικός

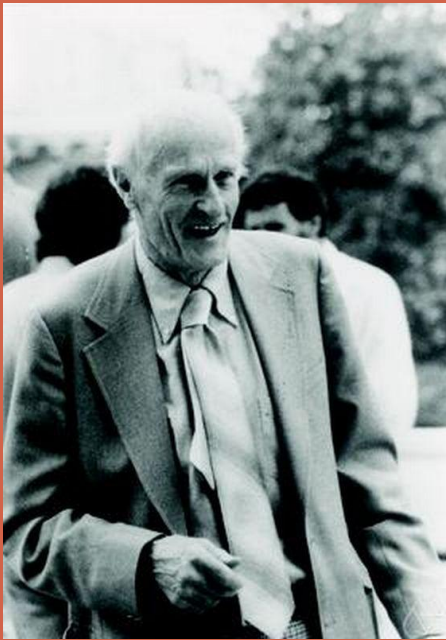


- Άλλος ένας μαθητής του Church που βοήθησε στη θεμελίωση της Επιστήμης των Υπολογιστών.



## Steven Kleene (1909-1994)

Αμερικανός  
μαθηματικός

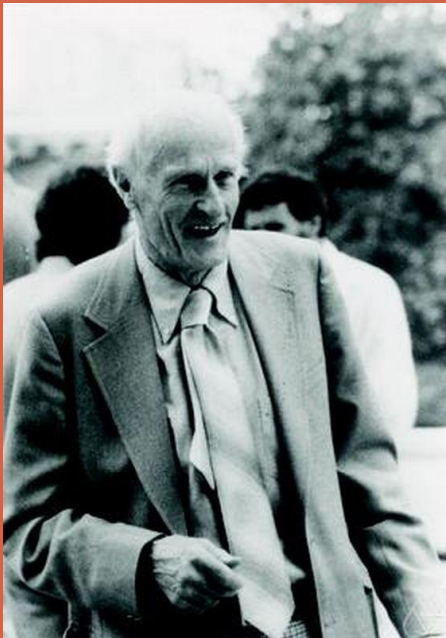


- Άλλος ένας μαθητής του Church που βοήθησε στη θεμελίωση της Επιστήμης των Υπολογιστών.
- Το **1952** αποδεικνύει την ισοδυναμία των τριών μοντέλων υπολογισμού που αναφέραμε:



## Steven Kleene (1909-1994)

Αμερικανός  
μαθηματικός

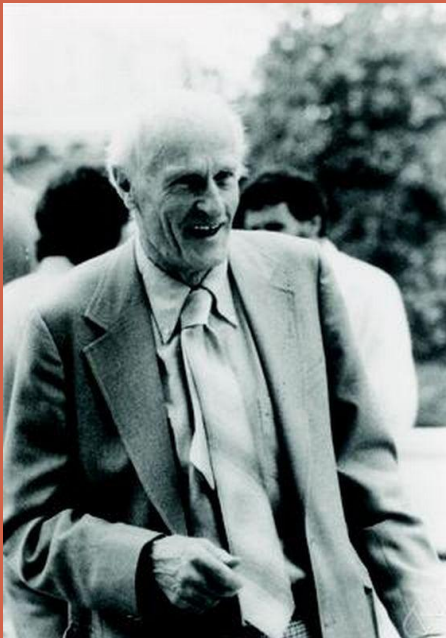


- Άλλος ένας μαθητής του Church που βοήθησε στη θεμελίωση της Επιστήμης των Υπολογιστών.
- Το **1952** αποδεικνύει την ισοδυναμία των τριών μοντέλων υπολογισμού που αναφέραμε:
  - των **μ-αναδρομικών** συναρτήσεων,



## Steven Kleene (1909-1994)

Αμερικανός  
μαθηματικός

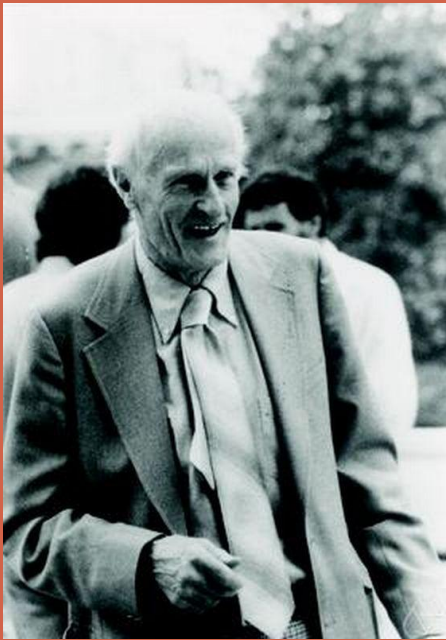


- Άλλος ένας μαθητής του Church που βοήθησε στη θεμελίωση της Επιστήμης των Υπολογιστών.
- Το **1952** αποδεικνύει την ισοδυναμία των τριών μοντέλων υπολογισμού που αναφέραμε:
  - των **μ-αναδρομικών** συναρτήσεων,
  - των **λ-υπολογίσιμων** συναρτήσεων και



## Steven Kleene (1909-1994)

Αμερικανός  
μαθηματικός



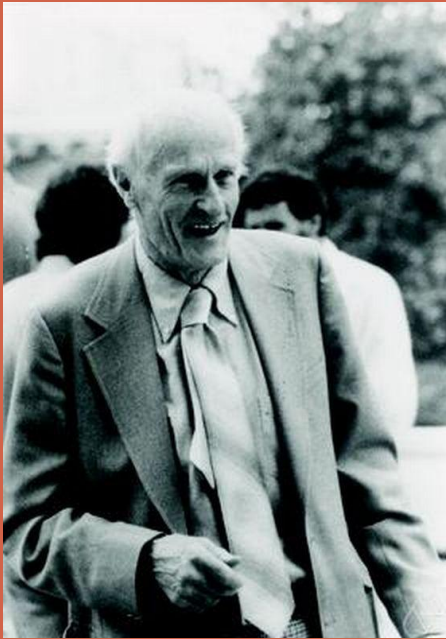
- Άλλος ένας μαθητής του Church που βοήθησε στη θεμελίωση της Επιστήμης των Υπολογιστών.
- Το **1952** αποδεικνύει την ισοδυναμία των τριών μοντέλων υπολογισμού που αναφέραμε:
  - των **μ-αναδρομικών** συναρτήσεων,
  - των **λ-υπολογίσιμων** συναρτήσεων και
  - των **Turing-υπολογίσιμων** συναρτήσεων.





## Steven Kleene (1909-1994)

Αμερικανός  
μαθηματικός



- Άλλος ένας μαθητής του Church που βοήθησε στη θεμελίωση της Επιστήμης των Υπολογιστών.
- Το **1952** αποδεικνύει την ισοδυναμία των τριών μοντέλων υπολογισμού που αναφέραμε:
  - των **μ-αναδρομικών** συναρτήσεων,
  - των **λ-υπολογίσιμων** συναρτήσεων και
  - των **Turing-υπολογίσιμων** συναρτήσεων.
- Διατυπώνει την **Θέση των Church-Turing**.

# Church-Turing Thesis



**ΚΑΘΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΙΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ**

**ΕΙΝΑΙ**

**TURING-ΥΠΟΛΟΓΙΣΙΜΗ**

# Halting Problem



**ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ**

**ΠΟΥ ΝΑ ΔΕΧΕΤΑΙ ΩΣ ΕΙΣΟΔΟ  
ΜΙΑ ΜΗΧΑΝΗ TURING ΚΑΙ ΜΙΑ ΕΙΣΟΔΟ ΤΗΣ  
ΚΑΙ ΝΑ ΑΠΟΦΑΣΙΖΕΙ ΑΝ Η ΜΗΧΑΝΗ TURING  
ΘΑ ΤΕΡΜΑΤΙΣΕΙ ΜΕ ΑΥΤΗ ΤΗΝ ΕΙΣΟΔΟ**




# Noam Chomsky (1928-)

Αμερικανός  
γλωσσολόγος



Ο Chomsky το 2017.




**Noam  
Chomsky  
(1928-)**

Αμερικανός  
γλωσσολόγος



Ο Chomsky το 2017.

- Από το **1955**, που του απενεμήθη το διδακτορικό του από το Πανεπιστήμιο του Harvard, είναι καθηγητής στο Ινστιτούτο Τεχνολογίας της Μασαχουσέτης (MIT).




## Noam Chomsky (1928-)

Αμερικανός  
γλωσσολόγος



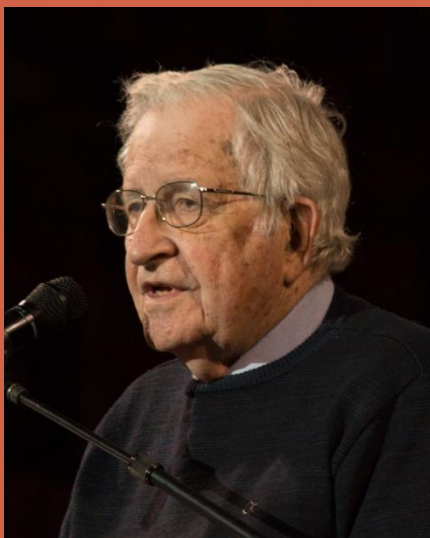
Ο Chomsky το 2017.

- Από το **1955**, που του απενεμήθη το διδακτορικό του από το Πανεπιστήμιο του Harvard, είναι καθηγητής στο Ινστιτούτο Τεχνολογίας της Μασαχουσέτης (MIT).
- Εισηγήγαγε πολλές νέες ιδέες και εργαλεία που άλλαξαν τον μέχρι τότε τρόπο μελέτης των γλωσσών και για αυτόν τον λόγο συχνά του αποδίδεται ο ρόλος του «πατέρα» της σύγχρονης γλωσσολογίας.



## Noam Chomsky (1928-)

Αμερικανός  
γλωσσολόγος



Ο Chomsky το 2017.

- Από το **1955**, που του απενεμήθη το διδακτορικό του από το Πανεπιστήμιο του Harvard, είναι καθηγητής στο Ινστιτούτο Τεχνολογίας της Μασαχουσέτης (MIT).
- Το **1956** περιγράφει την **ιεραρχία** του από **τυπικές γλώσσες** και τα **αυτόματα** που τις **αναγνωρίζουν**.

# Τυπικές Γλώσσες



- Οποιοδήποτε σύνολο μπορεί να θεωρηθεί **αλφάβητο**.



# Τυπικές Γλώσσες



- Οποιοδήποτε σύνολο μπορεί να θεωρηθεί **αλφάβητο**.
- Τα στοιχεία ενός αλφαβήτου καλούνται **σύμβολα**.

# Τυπικές Γλώσσες



- Οποιοδήποτε σύνολο μπορεί να θεωρηθεί **αλφάβητο**.
- Τα στοιχεία ενός αλφαβήτου καλούνται **σύμβολα**.
- Δοθέντος ενός αλφαβήτου  $\Sigma$ , **(τυπική) γλώσσα** είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του συνόλου  $\Sigma^*$  των πεπερασμένων ακολουθιών συμβόλων του  $\Sigma$ .

# Τυπικές Γλώσσες



- Οποιοδήποτε σύνολο μπορεί να θεωρηθεί **αλφάβητο**.
- Τα στοιχεία ενός αλφαβήτου καλούνται **σύμβολα**.
- Δοθέντος ενός αλφαβήτου  $\Sigma$ , **(τυπική) γλώσσα** είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του συνόλου  $\Sigma^*$  των πεπερασμένων ακολουθιών συμβόλων του  $\Sigma$ .
- Τα στοιχεία μίας γλώσσας καλούνται **λέξεις**.

# Αυτόματα



- Τα μαθηματικά μοντέλα υπολογισμού που αποτελούν αφηρημένες μηχανές καλούνται **αυτόματα**.

# Αυτόματα



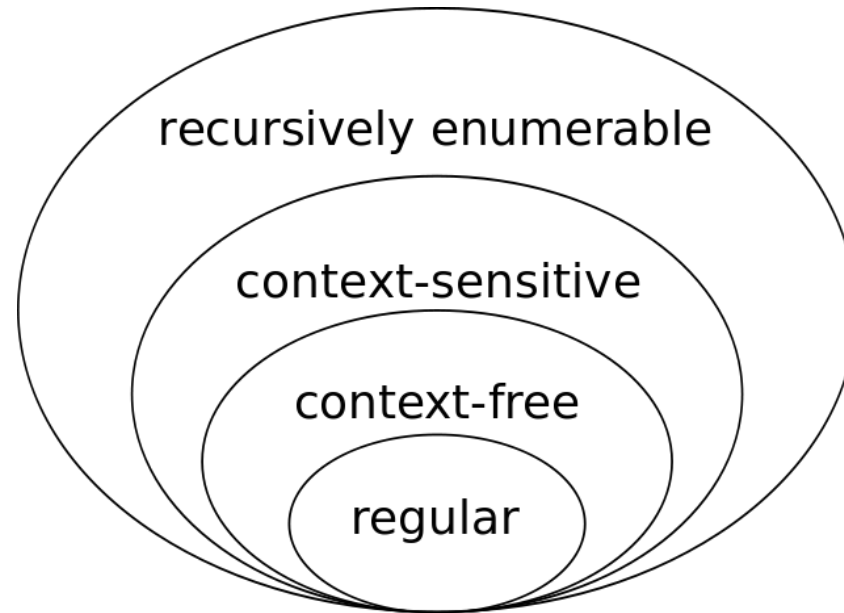
- Τα μαθηματικά μοντέλα υπολογισμού που αποτελούν αφηρημένες μηχανές καλούνται **αυτόματα**.
- Λέμε ότι ένα αυτόματο **αποδέχεται** μία γλώσσα  $\Gamma$  με αλφάβητο  $\Sigma$  αν επιλύει το πρόβλημα απόφασης που αφορά το σύνολο  $\Gamma$  με το  $\Sigma^*$  να είναι το ευρύτερο σύνολο του οποίου θα ελεγχθούν τα στοιχεία.

# Ιεραρχία Chomsky

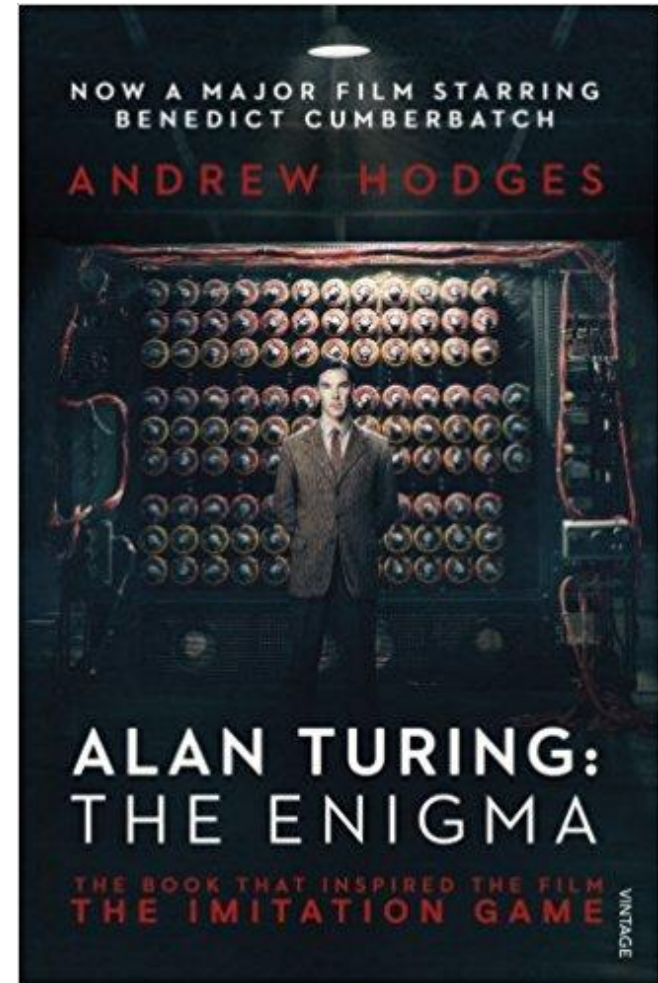
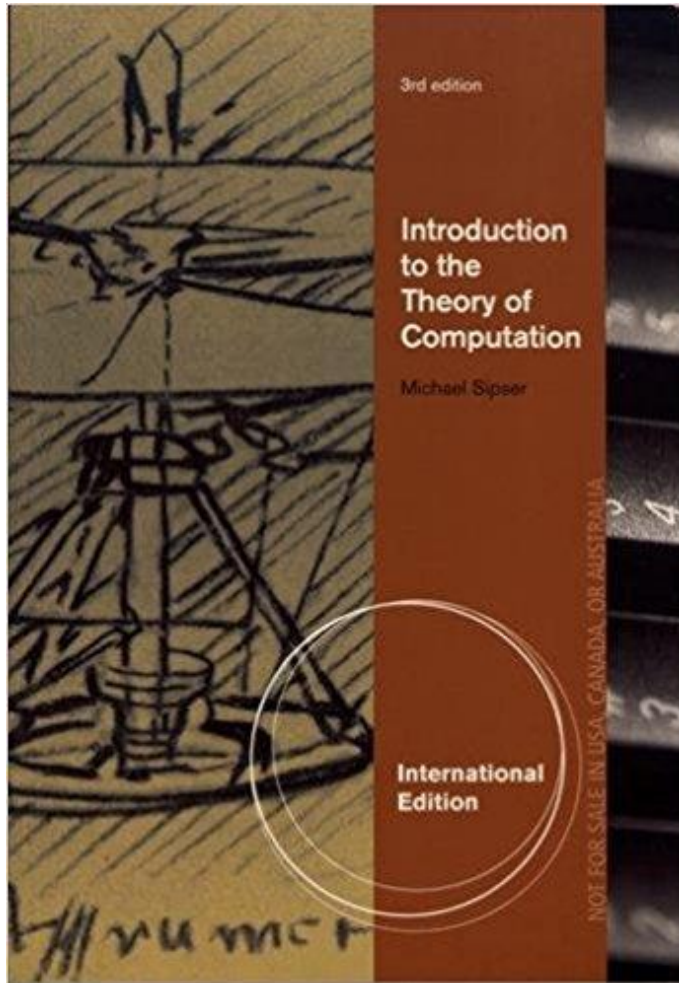


Τύπος	Γλώσσες που περιλαμβάνει	Αυτόματα που τις αναγνωρίζουν
0	Αναδρομικά Απαριθμήσιμες ( <i>Recursively Enumerable</i> )	Μηχανές Turing ( <i>Turing Machines</i> )
1	Με Συμφραζόμενα ( <i>Context-sensitive</i> )	Γραμμικά Φραγμένα Αυτόματα ( <i>Linear Bounded Automata</i> )
2	Χωρίς Συμφραζόμενα ( <i>Context-free</i> )	Πεπερασμένα Αυτόματα με Στοιβάδα ( <i>Pushdown Automata</i> )
3	Κανονικές ( <i>Regular</i> )	Πεπερασμένα Αυτόματα ( <i>Finite Automata</i> )

# Ιεραρχία Chomsky



# Προτεινόμενα Αναγνώσματα





# Βιβλιογραφία



- Το υλικό αυτής της ομιλίας αντλήθηκε από τις ακόλουθες εγγραφές τις Αγγλικής Wikipedia.
  - Alan Turing
  - Alonzo Church
  - Automata theory
  - Chomsky hierarchy
  - Church-Turing Thesis
  - Computability
  - Computable function
  - David Hilbert
  - Effective method

# Βιβλιογραφία



- Το υλικό αυτής της ομιλίας αντλήθηκε από τις ακόλουθες εγγραφές τις Αγγλικής Wikipedia.
  - Entscheidungsproblem
  - Halting problem
  - History of the Church-Turing Thesis
  - Kurt Gödel
  - Lambda calculus
  - Noam Chomsky
  - Turing machine
  - Turing machine gallery

**ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ**

# Δυσεπίλυτα Προβλήματα σε Γραφήματα και Παίγνια



ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΤΖΙΜΑΣ

Δ' ΤΟΜΕΑΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ