Προβλήματα δοκιμής στην Αριθμητική Ανάλυση

Γεώργιος Ακρίβης

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Λέσχη Μαθηματικών

Προβλήματα δοκιμής

Πρόκειται για απλές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις
που παίζουν ρόλο προτύπου.

Η σημασία τους έγκειται στο γεγονός ότι

αριθμητικές μέθοδοι που μιμούνται
τη συμπεριφορά των λύσεών τους,

συμπεριφέρονται καλά και όταν εφαρμοστούν
σε μια ευρύτατη αντίστοιχη κλάση διαφορικών
διαφορικών εξισώσεων, π.χ., της Φυσικής.

Εισήχθησαν από τον Germund Dahlquist (1925–2005)
Καθηγητή στο Πολυτεχνείο και το Πανεπιστήμιο
της Στοκχόλμης (1963–1990).

Στόχοι της παρουσίασης

1. Εξοικείωση με τα δύο προβλήματα δοκιμής
2. Κατανόηση εκφράσεων της μορφής «αριθμητικές μέθοδοι μιμούνται τη συμπεριφορά λύσεων διαφορικών εξισώσεων»

Πρώτο πρόβλημα δοκιμής (1963)

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), \quad t \geqslant 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

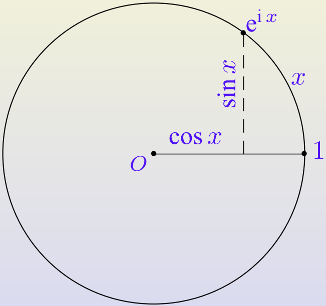
με $\lambda \in \mathbb{C}$.

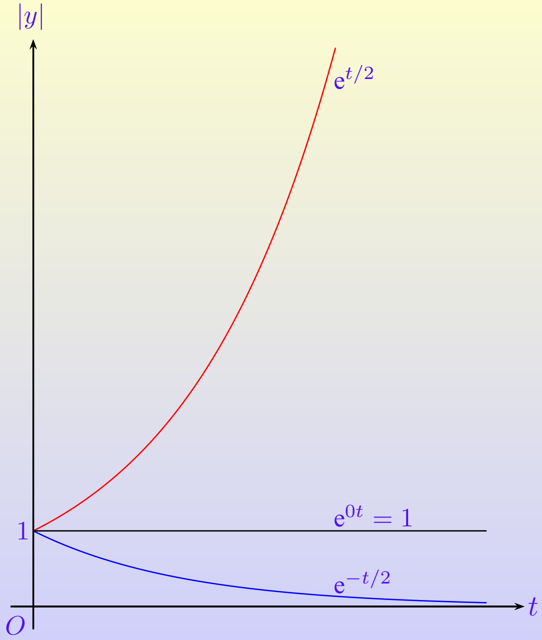
Λύση: $\boxed{y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}, \ t \geqslant 0.}$

Αφού $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$ (τύπος του Euler), για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}| = 1$, οπότε

$$|y(t)| = \mathrm{e}^{(\operatorname{Re}\lambda)t} \to \begin{cases} \infty, & \text{για} \quad \operatorname{Re}\lambda > 0, \\ 1, & \text{για} \quad \operatorname{Re}\lambda = 0, \\ 0, & \text{για} \quad \operatorname{Re}\lambda < 0, \end{cases} \quad \text{καθώς} \quad t \to \infty.$$

Τύπος του Euler: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$, για $x \in \mathbb{R}$.




$|y|$
$e^{t/2}$
$e^{0t} = 1$
1
$e^{-t/2}$
t
O

Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση

$$\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0,$$

γιατί τότε η λύση παραμένει φραγμένη.

Ειδική επιλογή αρχικής τιμής; Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), \quad t \geqslant 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

είναι $y(t) = y_0\, \mathrm{e}^{\lambda t},\ t \geqslant 0,$ και συμπεριφέρεται όπως και η λύση του αρχικού μας προβλήματος αρκεί να ισχύει $y_0 \neq 0.$

Στο MathSciNet υπάρχουν 153 παραπομπές σε αυτήν την εργασία του Dahlquist.

Δεύτερο πρόβλημα δοκιμής (1975)

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big), & a \leqslant t \leqslant b, \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

με $f : [a,b] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ μια *συνεχή* συνάρτηση.

Υπόθεση: Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή,

$$\boxed{\forall t \in [a,b] \quad \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d \quad \big(f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x - \tilde{x}\big) \leqslant 0}$$

με $(\cdot,\cdot)$ το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^d$.

Διαφορικές εξισώσεις με f που πληροί αυτή τη συνθήκη λέγονται αποσβεστικές (dissipative).

Καθοριστική συμβολή των John Butcher (1933–), Michel Crouzeix (1944–)

Ευστάθεια

Θεωρούμε τώρα δύο προβλήματα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big), & a \leqslant t \leqslant b, \\ y(a) = y_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} z'(t) = f\big(t, z(t)\big), & a \leqslant t \leqslant b, \\ z(a) = z_0, \end{cases}$$

και υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz.

Ερώτημα: Πώς συμπεριφέρεται η Ευκλείδεια νόρμα της διαφοράς $y(t) - z(t)$ στο διάστημα $[a, b]$;

Με $\varepsilon(t) := y(t) - z(t), a \leqslant t \leqslant b$, έχουμε

$$\varepsilon'(t) = f\big(t, y(t)\big) - f\big(t, z(t)\big),$$

οπότε, παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με $\varepsilon(t)$, δηλαδή με $y(t) - z(t)$, έχουμε

$$\big(\varepsilon'(t), \varepsilon(t)\big) = \Big(f\big(t, y(t)\big) - f\big(t, z(t)\big), y(t) - z(t)\Big).$$

Τώρα, σύμφωνα με την υπόθεσή μας, το δεξιό μέλος είναι μη θετικό, οπότε

$$\big(\varepsilon'(t), \varepsilon(t)\big) \leqslant 0.$$

Αλλά

$$\begin{aligned}
\big(\varepsilon'(t), \varepsilon(t)\big) &= \varepsilon_1'(t)\varepsilon_1(t) + \cdots + \varepsilon_d'(t)\varepsilon_d(t)\\
&= \frac{1}{2}\big[\big(\varepsilon_1(t)\big)^2\big]' + \cdots + \frac{1}{2}\big[\big(\varepsilon_d(t)\big)^2\big]'\\
&= \frac{1}{2}\big[\big(\varepsilon_1(t)\big)^2 + \cdots + \big(\varepsilon_d(t)\big)^2\big]'\\
&= \frac{1}{2}\big(\|\varepsilon(t)\|^2\big)'.
\end{aligned}$$

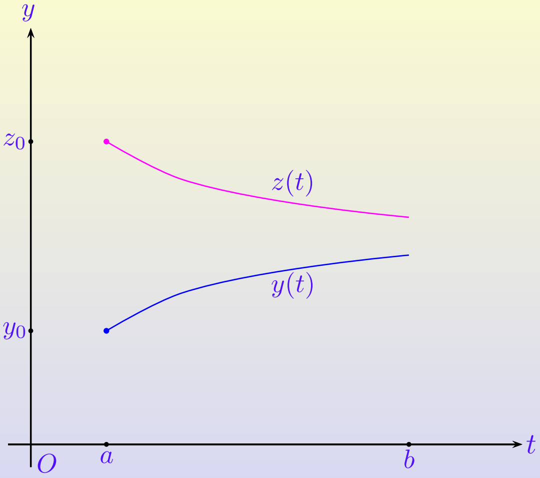
Επομένως

$$\big(\|\varepsilon(t)\|^2\big)' \leqslant 0,$$

οπότε η $\|\varepsilon(t)\|^2$ είναι φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$.
Άρα, και η $\|\varepsilon(t)\|$ είναι φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$,

$$\boxed{a \leqslant s \leqslant t \leqslant b \quad \|y(t) - z(t)\| \leqslant \|y(s) - z(s)\|.}$$

Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο τέτοιες εξισώσεις λέγονται αποσβεστικές.



Στο MathSciNet υπάρχουν 47 παραπομπές σε αυτήν την εργασία του Dahlquist.

Κατανόηση της μονόπλευρης συνθήκης του Lipschitz

Ειδικές περιπτώσεις:

Στη βαθμωτή περίπτωση ($d = 1$), η μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz γράφεται ως

$$\boxed{\forall t \in [a,b] \quad \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R} \quad \big(f(t,x) - f(t,\tilde{x})\big)(x - \tilde{x}) \leqslant 0}$$

και σημαίνει απλούστατα ότι η $f(t,\cdot)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς τη δεύτερη μεταβλητή της, για κάθε $t \in [a,b]$.

(Γενικά, η μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz αναφέρεται και ως συνθήκη μονοτονίας ή ως συνθήκη αντιμονοτονίας.)

Στη γραμμική περίπτωση, η $f(t,x) = \lambda(t)x + \mu(t)$ ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz αν και μόνο αν $\lambda(t) \leqslant 0$, για κάθε $t \in [a,b]$.

Στη γραμμική διανυσματική περίπτωση, έχουμε

$$f(t,x) = A(t)x + \mu(t), \quad A(t) \in \mathbb{R}^{d,d}, \ \mu(t) \in \mathbb{R}^d,$$

οπότε

$$f(t,x) - f(t,\tilde{x}) = A(t)(x - \tilde{x}),$$

και η μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz ικανοποιείται αν και μόνο αν

$$\boxed{\forall t \in [a,b] \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (A(t)x, x) \leqslant 0,}$$

δηλαδή αν ο πίνακας $A(t)$ είναι μη θετικά ορισμένος, για κάθε $t \in [a,b]$.

Σχέση μεταξύ των δύο προβλημάτων δοκιμής;

Αν y_1 και y_2 είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της y, αντίστοιχα, και α, β το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του λ, αντίστοιχα, τότε η γραμμική εξίσωση $y' = \lambda y$ του πρώτου προβλήματος δοκιμής γράφεται ως πραγματικό σύστημα στη μορφή

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας A,

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

ικανοποιεί τη σχέση

$$(Ax, x) = \alpha \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Ιδιαίτερα, δηλαδή, στην ενδιαφέρουσα περίπτωση που το πραγματικό μέρος του λ είναι μη θετικό, το πρώτο πρόβλημα δοκιμής αποτελεί ειδική περίπτωση του δεύτερου προβλήματος δοκιμής.

Παρατήρηση: Η διαφορά $\varepsilon(t) := y(t) - z(t), a \leqslant t \leqslant b,$ δύο λύσεων μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης, ικανοποιεί την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση,

$$\left.\begin{aligned} y'(t) &= \lambda(t)y(t) + \mu(t) \\ z'(t) &= \lambda(t)z(t) + \mu(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varepsilon'(t) = \lambda(t)\varepsilon(t).$$

Γι' αυτό στην περίπτωση της ευστάθειας για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις αρκεί να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.

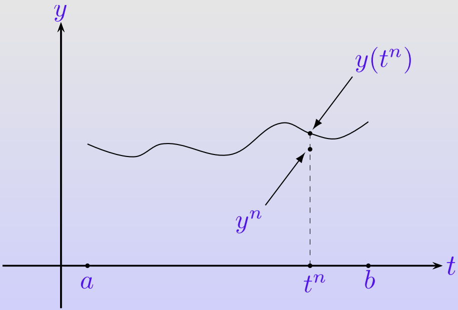
Διακριτοποίηση

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \quad a \leqslant t \leqslant b, \\ y(a) = y^0. \end{cases}$$

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h := (b-a)/N$, και $t^n := a + nh, \ n = 0, \dots, N.$

Οι αριθμητικές μέθοδοι δίνουν προσεγγίσεις y^m των τιμών $y(t^m)$ της λύσης στους κόμβους του διαμερισμού.



Με $y^0 := y_0$ (την ακριβή αρχική τιμή), ορίζουμε προσεγγίσεις y^m των τιμών $y(t^m)$ της λύσης στους κόμβους αναδρομικά ως εξής:

(1) $$y^{n+1} := y^n + hf(t^n, y^n)$$ (μέθοδος του Euler)

(2) $$y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1})$$ (πεπλεγμένη μέθοδος του Euler)

(3) $$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\big[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\big]$$ (μέθοδος του τραπεζίου)

(4) $$y^{n+1} = y^n + hf\Big(\frac{t^n + t^{n+1}}{2}, \frac{y^n + y^{n+1}}{2}\Big)$$ (μέθοδος του μέσου)

$n = 0, \dots, N-1.$

Κατασκευή αυτών των μεθόδων

Έχουμε

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt,$$

οπότε

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt.$$

Προσεγγίζοντας το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος με

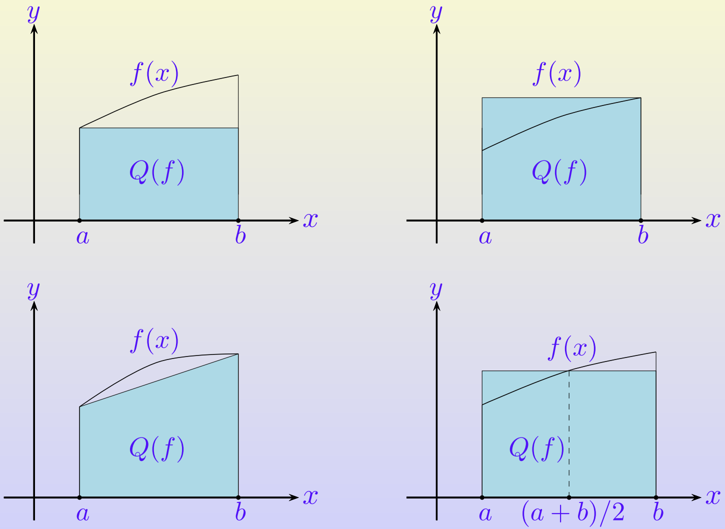
$$hf(t^n, y(t^n)) \qquad \text{(αριστερός τύπος του ορθογωνίου)}$$

$$hf(t^{n+1}, y(t^{n+1})) \qquad \text{(δεξιός τύπος του ορθογωνίου)}$$

$$\frac{h}{2}\big[f(t^n, y(t^n)) + f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))\big] \qquad \text{(τύπος του τραπεζίου)},$$

αντίστοιχα, και αντικαθιστώντας το $\approx$ με $=$ και τις ακριβείς τιμές $y(t^m)$ με προσεγγίσεις y^m οδηγούμαστε στις τρεις πρώτες μεθόδους.

Υπενθύμιση: Τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης



Ορισμός

Μια αριθμητική μέθοδος λέγεται Α-ευσταθής, αν μιμείται την ιδιότητα της ακριβούς λύσης του πρώτου προβλήματος δοκιμής για $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$, δηλαδή αν η ακολουθία $(|y^n|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι φθίνουσα (για όλα τα θετικά h).

Μια αριθμητική μέθοδος λέγεται Β-ευσταθής, αν μιμείται την ιδιότητα της ακριβούς λύσης του δεύτερου προβλήματος δοκιμής, δηλαδή αν η ακολουθία $(\|y^n - z^n\|)_{n=0,\dots,N}$ είναι φθίνουσα.

$$\boxed{\text{Β-ευστάθεια} \Rightarrow \text{Α-ευστάθεια}, \qquad \text{Α-ευστάθεια} \not\Rightarrow \text{Β-ευστάθεια}}$$

(Στην περίπτωση πολυβηματικών μεθόδων απαιτείται μια μικρή τροποποίηση των ορισμών.)

Η μέθοδος του Euler δεν είναι Α-ευσταθής

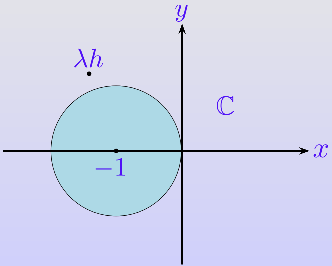
Εφαρμόζοντας τη μέθοδο στο πρώτο πρόβλημα δοκιμής, παίρνουμε

$$y^{n+1} = (1+\lambda h)y^n \quad \Rightarrow \quad |y^{n+1}| = |1+\lambda h|\,|y^n|.$$

Για λh έξω από τον μοναδιαίο δίσκο στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο το $-1,$ έχουμε $|1+\lambda h| > 1,$ συνεπώς

$$|y^{n+1}| > |y^n|.$$

Άρα, η μέθοδος δεν είναι Α-ευσταθής.



Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler είναι B-ευσταθής

Έχουμε $y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1})$ και $z^{n+1} = z^n + hf(t^{n+1}, z^{n+1})$, οπότε

$$y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h\big[f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1})\big].$$

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με $y^{n+1} - z^{n+1}$, ο τελευταίος όρος είναι μη θετικός, οπότε

$$\|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 \leqslant (y^n - z^n, y^{n+1} - z^{n+1}).$$

Συνεπώς, σύμφωνα με την ανισότητα των Cauchy–Schwarz,

$$\|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 \leqslant \|y^n - z^n\| \, \|y^{n+1} - z^{n+1}\|.$$

Άρα,

$$\boxed{\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \leqslant \|y^n - z^n\|,}$$

που είναι η επιθυμητή ιδιότητα.

Η μέθοδος του τραπεζίου είναι Α-ευσταθής

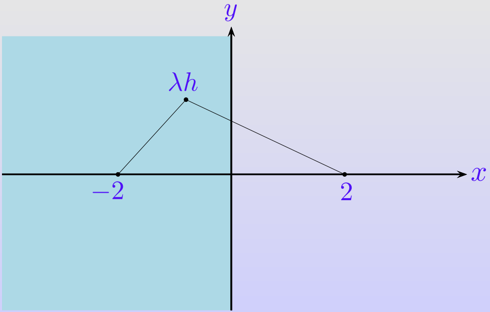
Εφαρμόζοντας τη μέθοδο στο πρώτο πρόβλημα δοκιμής, παίρνουμε

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}(\lambda y^n + \lambda y^{n+1}) \quad \Rightarrow \quad |y^{n+1}| = \frac{|2+\lambda h|}{|2-\lambda h|}|y^n|.$$

Για λh στο μη θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο έχουμε

$$|2+\lambda h| \leqslant |2-\lambda h|, \quad \text{συνεπώς} \quad |y^{n+1}| \leqslant |y^n|.$$

Άρα, η μέθοδος είναι όντως Α-ευσταθής.



Η μέθοδος του τραπεζίου δεν είναι B-ευσταθής

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών για μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής $y'(t) = \lambda(t)y(t)$, με $\lambda(t) \leqslant 0$, έχουμε

$$y^{n+1} = \frac{2 + h\lambda(t^n)}{2 - h\lambda(t^{n+1})} y^n.$$

Σταθεροποιούμε ένα βήμα h και επιλέγουμε, π.χ., τη συνάρτηση λ έτσι ώστε $h\lambda(t^n) = -8$ και $h\lambda(t^{n+1}) = -1$. Τότε,

$$y^{n+1} = \frac{2 - 8}{2 + 1} y^n = -2y^n,$$

συνεπώς $|y^{n+1}| = 2|y^n|$. Άρα, η μέθοδος δεν είναι B-ευσταθής.

Η μέθοδος του μέσου είναι B-ευσταθής

Έχουμε
$y^{n+1} = y^n + hf\Big(\frac{t^n+t^{n+1}}{2}, \frac{y^n+y^{n+1}}{2}\Big), z^{n+1} = z^n + hf\Big(\frac{t^n+t^{n+1}}{2}, \frac{z^n+z^{n+1}}{2}\Big)$
οπότε

$$(y^{n+1} - z^{n+1}) - (y^n - z^n)$$
$$= h\Big[f\Big(\frac{t^n + t^{n+1}}{2}, \frac{y^n + y^{n+1}}{2}\Big) - f\Big(\frac{t^n + t^{n+1}}{2}, \frac{z^n + z^{n+1}}{2}\Big)\Big].$$

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με $\frac{y^n+y^{n+1}}{2} - \frac{z^n+z^{n+1}}{2}$, το δεξιό μέλος είναι μη θετικό, οπότε

$$\frac{1}{2}\big((y^{n+1} - z^{n+1}) - (y^n - z^n), (y^{n+1} - z^{n+1}) + (y^n - z^n)\big) \leqslant 0,$$

δηλαδή

$$\|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 - \|y^n - z^n\|^2 \leqslant 0.$$

Άρα,

$$\boxed{\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \leqslant \|y^n - z^n\|,}$$

που είναι η επιθυμητή ιδιότητα.

Ανακεφαλαίωση

1. Γνωρίσαμε τα δύο προβλήματα δοκιμής του Dahlquist
2. Είδαμε αριθμητικές μεθόδους που δεν μιμούνται τη συμπεριφορά των λύσεων κανενός από τα δύο προβλήματα δοκιμής
3. Είδαμε αριθμητικές μεθόδους που μιμούνται τη συμπεριφορά των λύσεων του πρώτου προβλήματος δοκιμής (A-ευστάθεια)
4. Είδαμε αριθμητικές μεθόδους που μιμούνται τη συμπεριφορά των λύσεων του δεύτερου προβλήματος δοκιμής (B-ευστάθεια)
5. Μάθαμε ότι: B-ευστάθεια $\Rightarrow$ A-ευστάθεια
6. Μάθαμε ότι: A-ευστάθεια $\not\Rightarrow$ B-ευστάθεια

Σας ευχαριστώ πολύ!